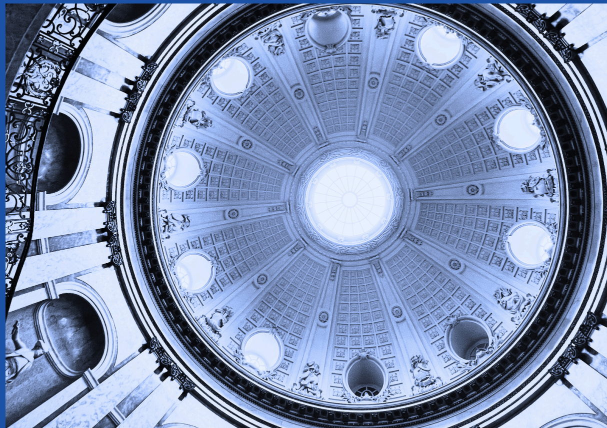
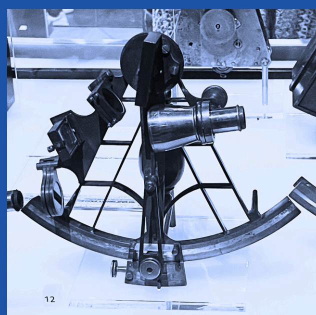
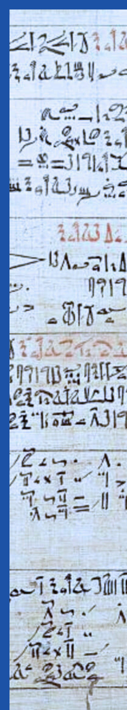
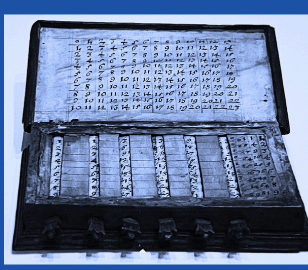
ÁIS MATES

N°7. OUTUBRO 2024 • REVISTA ESTUDANTIL









FACULTADE DE MATEMÁTICAS

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Introdución

Dirección da Revista

ÍNDICE

Moi bo día lectora ou lector!

Presentamos un novo número da Revista Maís Mates, seguimos traballando por detrás para levar a cabo este proxecto tan curioso e divertido dende a nosa Facultade.

Agardamos que lle sexa de interese esta revista, e neste novo ano, intentamos traer novidades.

A primeira novidade está na sección de Retos, que se vos achegades alí poderedes observar que ten unha nova formulación, cun sudoku, cunha partida de xadrez. Aínda así, sen esquecer os tipos de problemas planteados durante o ano anterior.

Por outra banda, intentaremos abrir novas fronteiras, para conseguir unha maior implicación do estudantado na revista e posibilitar a continuación do proxecto.

As voltas que deu o cero

Francisco Estévez Lengua

Sempre nos acompaña, cando se nos apaga o mobil ou o portátil, cando non sabemos nada dun exame, cando escribimos a orixe dunhas coordenadas, o número de materias pendentes que queremos ter, iso que non importa se está á esquerda...

É un número, é un concepto? Quen é o cero?
Ademais este número da para moito debate na nosa facultade, pois todas coñecemos as disputas entre o profesorado e estudantado sobre se o cero é un número natural. Algúns diranvos que o cero é natural porque é o número de elementos do conxunto baleiro; outros dirán que non se pode empregar na indución... Deixando a parte as diferenzas deste debate, visitemos a historia de como nace o cero.

Babilonia

Os babilonios, arredor do 300 a.C., foron os primeiros en usar un símbolo similar ao cero para representar a ausencia de cantidade.

Como curiosidade, empregaban o sistema sexaxesimal. Para eles, este símbolo era só un *marcador de posición*, non era un número propiamente dito. Representábase por un espazo ou unha dobre cuña, pero non tiñan un concepto abstracto de *cero* como número con valor propio.

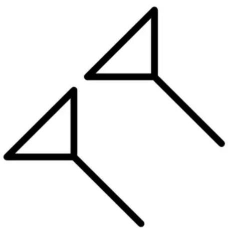


Fig. 1: Cero da civilización babilonia

India antiga

O desenvolvemento do cero como número independente e con valor matemático atribúese habitualmente aos matemáticos da India, que o denominaban en sánscrito *shunya* (o baleiro). **Brahmagupta**, un matemático indio do século VII, foi o primeiro en desenvolver regras matemáticas claras para o uso do cero. Na súa obra *Brahmasphutasiddhanta* (628 d.C.) explicou como operar co número cero e recoñeceu a súa importancia nos cálculos alxebraicos. Definiu operacións básicas co cero, aínda que cometeu o *terrible* erro de dividir por cero, problema que se expuxo e que persoeiros posteriores axustarían.

Na numeración india, o símbolo para o cero era un pequeno círculo (como o que usamos hoxe en día). Este sistema, coñecido como o *sistema de numeración hindú-árabe*, é o antecesor directo dos números que usamos actualmente.

Un facto interesante é que tamén lle debemos aos indios as cifras do 1 ao 9, tal como as escribimos hoxe.

Os maias (c. 300 d.C.)

De maneira independente, os maias de Mesoamérica tamén desenvolveron un símbolo para o cero arredor do 300 d.C. Usaban un sistema numérico vigesimal (base 20), e o cero estaba representado por un símbolo que asemellaba a unha cuncha ou caracol. Para eles, o cero usábase como un marcador de posición e tiña significado no seu sistema de calendario e na astronomía.

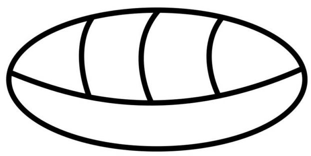


Fig. 2: Cero da civilización maia

Difusión cara o mundo islámico e Europa (c. 800-1200 d.C.)

Os matemáticos árabes xogaron un papel clave na difusión do concepto do cero. **Al-Khwarizmi**, un influente matemático persa, introduciu o sistema numérico hindú-árabe no mundo islámico durante o século IX. A súa obra sobre álxebra e aritmética foi crucial para transmitir estas ideas a Europa.

O matemático italiano **Leonardo de Pisa**, coñecido como *Fibonacci*, introduciu o sistema numérico hindú-árabe en Europa coa súa obra *Liber Abaci*(1202), onde explicou as vantaxes de usar o cero e os números árabes no canto dos números romanos. Cremos que é ben coñecido que o sistema dos números romanos non é posicional, é aditivo, polo tanto non era necesario ter un símbolo para o cero.

Fig. 3: Cero da civilización maia

Europa e o desenvolvemento moderno (século XIII en diante)

Aínda que o sistema de numeración hindú-árabe chegou a Europa no século XIII, a súa adopción non foi inmediata. Os números romanos seguían dominando, e o concepto do cero xeraba controversia. Esto é tan certo coma que había detractores do cero, que era un invento do *diablo* (o mesmo que coa derivada, que era ilegal!).

Co tempo, o uso do cero consolidouse en Europa grazas ao desenvolvemento das matemáticas modernas e á súa aplicación no comercio e na contabilidade.

Durante o Renacemento, traballouse co concepto de cero, formalizando o seu papel nas matemáticas.

Preguntas lóxicas: e os gregos?

Co control das matemáticas gregas, podemos pensar que podían ter unha idea de que os gregos traballaban co cero. Seguramente terían a intución de que a nada pode existir (ou non, depende a que grego lle preguntes), pero as súas operacións basábanse en traballar con segmentos.

A substracción dun segmento a outro segmento sempre dá outro segmento; porén se ambos segmentos son iguais temos un segmento sen lonxitude: un punto. O que explica porqué na xeometría grega non precisou do cero nen dos números negativos.

O cero e a sociedade

O cero sempre estivo presente no mundo dos números das diversas civilizacións, dándolles diferentes formas e escrituras. Queda aberta a pregunta de porqué as/os alxebristas e os/as de análise se pelean entre eles polo cero...

Ademais o nacemento do cero coma concepto xera un conflicto filosófico. Que significa o cero? Podemos relacionar o cero como 'nada'? Nas ciencias, o cero é fundamental, pensemos por exemplo o concepto de que un sistema físico ten enerxía *nula* ou temperatura *cero absoluto*.

Referencias bibliográficas

Boyer, Carl B. *A History of Mathematics*. John Wiley & Sons, 1991.

Kaplan, Robert. *The Nothing That Is: A Natural History of Zero*. Oxford University Press, 1999.

Estatística, intelixencia e un paxaro das antípodas

Santiago González Gómez

Moitas grazas a Amalia Bastos e a Mathilde Eriksen pola súa axuda para a realización deste artigo. Sen elas, non sería posible, ou alomenos sería moi distinto. Por máis contacto entre os investigadores e a sociedade, e por máis científicas dispostas a compartir o seu traballo!

Cando pensamos en animais e en intelixencia, seguramente se nos veñan á cabeza diversos comportamentos profundamente arraigados na cultura popular: os elefantes volvendo ao seu lugar de nacemento para morrer, os golfiños adestrados, os vídeos de chimpancés realizando xogos de memoria... Porén, o máis probable é que ningún de nós pense nun certo paxaro que habita literalmente ao outro lado do mundo, e que en cambio ten máis en común con nós, estudantes de matemáticas, do que poderiamos imaxinar a primeira vista: o kea.

Fig. 1: *Un kea durante un experimento. Foto de Amalia Bastos.*

Un suxeito prometedor

O kea (*Nestor notabilis*) é unha especie de loro natural de Nova Zelandia. Habita comunmente en alta montaña, e aínda que anteriormente foi común en todo o arquipélago, actualmente atópase reducido á Illa Sur e está clasificado como en perigo de extinción. A intelixencia deste curioso paxaro foi obxecto dun estudo ([1]) cuxos resultados foron publicados en 2020 por Amalia Bastos e Alex Taylor. Os seus experimentos revelaron que o kea é capaz de mostrar capacidades de inferencia estatística que ata o momento só se observaran en grandes primates e, polo tanto, un certo grao de intelixencia matemática.

O que coñecemos como inferencia estatística basicamente corresponde coa capacidade de extraer conclusións sobre unha situación ou poboación en xeral en base a información limitada. Neste senso, é un proceso que require dunha capacidade de abstracción e dedución lóxicas de alta complexidade. En [1] establécense tres rasgos característicos relacionados coa capacidade de inferencia, e que son os que procuran os investigadores en animais: o uso de frecuencias relativas no canto de cantidades absolutas para realizar predicións; a capacidade de analizar situacións nas que existe algún tipo de barreira física; e a incorporación de información e preferencias sociais para a realización de predicións (entenderemos mellor estes puntos ao falar dos experimentos realizados). Os bebés, por exemplo, mostran unha completa capacidade de inferencia estatística, mentres que certas especies de grandes primates, como os chimpancés, tamén presentan algúns destes rasgos.

Para avaliar a capacidade de inferencia do kea, seis exemplares foron adestrados para someterse a unha serie de probas. Nelas, aos kea presentábanselles dous frascos transparentes con distintas proporcións de fichas negras e laranxas. Un científico escollía unha ficha de cada un deles, ocultándollo ao kea, e gardábaas unha en cada man. O kea tiña que esoller entón unha das mans unicamente sabendo de que frasco proviña a ficha que nela se escondía. Se a ficha resultaba ser negra, había recompensa; se era laranxa, o paxaro marchaba coas patas baleiras. Un animal capaz de analizar a situación e as probabilidades escollería a man correspondente ao frasco no que resultase máis probable que a ficha extraída fose negra. Os kea prefiriron espontaneamente os frascos con mellor probabilidade, e tras 120 probas, chegaron a elixir correctamente 17 de cada 20 veces.

Para probar ademais se o kea traballaba con probabilidades relativas ou absolutas, repetiuse o experimento colocando o mesmo número de fichas negras en ambos frascos, pero moitas máis fichas laranxas nun deles; e logo colocando o mesmo número de fichas laranxas, pero distinto número de fichas negras. O kea tamén pasou esta proba (que, por exemplo, fallan os monos capuchinos), demostrando que en efecto traballan con probabilidades relativas. É máis, catro dos seis keas deron resultados mellores que o azar xa nos primeiros 20 intentos.

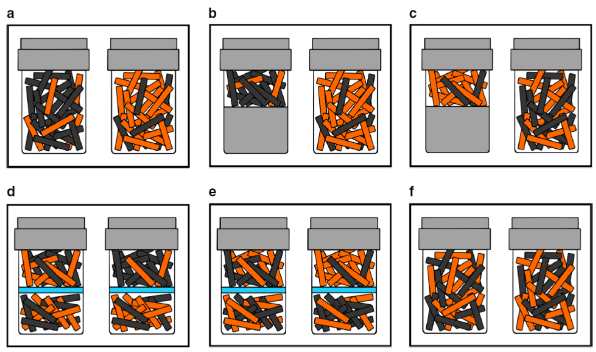


Fig. 2: *Frascos dos experimentos 1 (a,b,c), 2 (d,e) e 3 (f) do estudio de 2020.*

Nun segundo experimento, os frascos incluían unha barreira na metade, de forma que o científico só podía extraer fichas da metade superior. Os kea foron tamén capaces de decatarse de que, para avaliar a situación, só debían ter en conta as cantidades por riba da barreira.

Nun último experimento, estudouse se o kea era quen de distinguir entre un científico nesgado e un inesgado. Primeiro, os kea observaron como dous investigadores extraían unha ficha en condicións similares ás do primeiro experimento. Ambos extraían sempre unha ficha con recompensa, pero un facíao collendo do frasco que realmente tiña mellor probabilidade, e o outro do frasco que tiña peor probabilidade. A continuación, ambos frascos enchéronse con fichas a unha proporción 50/50. O investigador nesgado colleu dun dos frascos, e o inesgado do outro. Tres dos seis kea escolleron con máis frecuencia cá dada polo azar a ficha do investigador nesgado, mostrando que entenderan que era máis probable que o científico nesgado extraese a ficha con recompensa.

Aínda que nos é difícil como humanos imaxinar seguir uns comportamentos diferentes a estes, tal comportamento é intelectualmente complexo, e require dunha comprensión das mesmas regras que empregamos para realizar tarefas matemáticas de inferencia.

Entrevistando a Mathilde

Dende esta revista, puxémonos en contacto con Amalia Bastos, que traballou no estudo orixinal, e que nos contou que Alex Taylor segue facendo estudos sobre o kea. Aínda que ela xa non participa nas novas investigacións, púxonos en contacto con Mathilde Eriksen, unha estudante que se atopa agora mesmo traballando cos kea e moi amablemente accedeu a respondernos unhas preguntas.

P: De que estamos a falar cando falamos de "intelixencia animal"?

R: Esta é unha boa pregunta, e serei o suficientemente descarada como para contestar con outra pregunta: sabémolo? O importante é como definila. Cando investigamos a "intelixencia animal", ou, como nós prefirimos chamala, *cognición*, adoitamos fixarnos en por que a cognición humana semella única. Antigamente pensábase que a cognición humana é única debido á nosa habilidade para empregar ferramentas. Porén, estudos en cognición animal mostraron que moitos animais empregan ferramentas, e outros mesmo poden inventalas ou gardalas para uso futuro ([2], [3], [4]). Unha das hipóteses máis recentes é que a cognición humana é única debido á nosa habilidade para comprender e empregar linguaxe e gramática; con todo, certos estudos comezan agora a mostrar signos de linguaxe en animais ([5], [6]), aínda que sen o uso de gramática. O que quero dicir con estes exemplos é que a intelixencia é difícil de definir, pero que a recoñecemos cando a vemos. Creo que deberiamos considerar a posibilidade de que a cognición e a intelixencia poidan interpretarse de moitos xeitos.

Tentarei explicalo cun exemplo: pensa no experimento do espello, que tenta mostrar se un animal posúe autoconsciencia. Nesta proba, ao animal de estudo píntaselle un punto e logo pónselle diante un espello. A idea é que se o animal mira ao espello e recoñece que o punto está no seu corpo, sexa porque o mira ou tenta quitalo, entón o animal posúe consciencia de si mesmo ([7]). Como humanos, moitos diriamos que se o animal non reacciona ao punto, entón non posúe autoconsciencia. Porén, cómpre facer notar que os humanos asumimos que a autoconsciencia se basea unicamente na visión. Pero que ocorre cos animais que teñen, por exemplo, autoconsciencia baseada no cheiro? [1] Segundo este test, estes animais serían considerados menos intelixentes simplemente por fallar a proba. Albert Einstein dixo unha vez, "Todo o mundo é un xenio. Pero se xulgas un peixe pola súa habilidade para escalar unha árbore, vivirá pensando que é estúpido". En consecuencia, cando os científicos estudamos a cognición animal, tentamos comprender como perciben, como se adaptan e como actúan no ambiente que os arrodea. Dende aí, ás veces buscamos similitudes co noso comportamento.

En resumo, cando falamos de intelixencia/cognición animal, falamos do estudo das habilidades animais para adaptarse á súa contorna e de tentar entendermos como perciben o mundo sen xulgalos segundo o "se non podes facer isto como un humano, non es intelixente". Ademais, non só falamos de entender a súa intelixencia, senón que estamos achegándonos a comprender a nosa propia tendendo unha ponte entre humanos e animais.

[1]Este é o caso de, por exemplo, os cans.

P: Por que medides a intelixencia estatística dun animal? Que vos di iso sobre a súa intelixencia xeral?

R: A inferencia estatística é a habilidade de predicir ou tomar decisións sobre o resultado dunha mostraxe segundo as proporcións nas poboacións de extracción. Cando un comportamento (como a habilidade para realizar inferencias) ocorre en dúas especies moi diferentes, pode haber dúas explicacións: unha é que o comportamento provén dun ancestro común; a outra, que evolucionaron independentemente (un fenómeno coñecido como evolución converxente). O noso traballo no laboratorio do profesor Taylor (o Animal Mind Lab) busca determinar se a habilidade dos kea, ratos e humanos para realizar inferencia estatística evolucionou converxentemente. Isto pode axudarnos a comprender algúns dos mecanismos subxacentes que constitúen a intelixencia humana. Estudamos a intelixencia estatística en kea, ratos e humanos usando un método chamado "signature testing approach" ([8]). Este enfoque tenta afastarse da importancia que en estudos anteriores se daba a probas de ensaio e erro, como a proba do espello, e centrarse nos erros e nesgos que os humanos cometemos cando, por exemplo, realizamos inferencia estatística. Analizamos como os kea realizan inferencia estatística para comprender se caen nos mesmos erros cós humanos e cós ratos. Se este fose o caso, axudaríanos a pechar a fenda entre intelixencia humana e animal, pois mostraría que as nosas mentes e as dos animais puideron desenvolverse converxentemente, e polo tanto non serían tan diferentes.

P: Que ten o kea de especial? (basicamente, por que se decidiu realizar máis investigacións sobre eles?)

R: Outra boa pregunta. Os kea son a única especie de loro alpino e son endémicos de Nova Zelandia. Algunhas teorías din que os kea son especiais porque non estiveron expostos a depredadores pero si tiveron que sobrevivir nas montañas con relativamente pouca comida. Isto fíxoos moi neofílicos, é dicir, que lles gustan as cousas novidosas. Ademais, son moi sociables e viven en grupos con xerarquías fluídas, o que se cre é unha razón para que estes animais posúan unha maior intelixencia (a hipótese da intelixencia social) ([9]). En estado salvaxe, sábese que son destrutivos (destrúen a goma dos coches) e que lles gustan os humanos (roubando comida á menor oportunidade). Isto fainos animais atractivos e indica que poden posuír algunha forma de intelixencia superior. Todo isto, xunto co seu comportamento natural, tamén fai sinxelo adestralos e traballar con eles, así que son unha especie xenial para a investigación cognitiva.

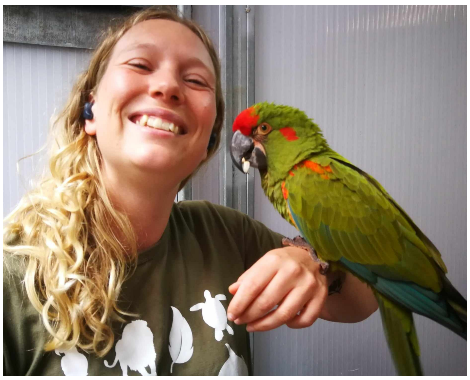


Fig. 3: *A nosa entrevistada.*

P: Que estades avaliando agora mesmo? Son prometedores os resultados?

R: Estamos realizando novos estudos sobre a capacidade do kea para realizar inferencia estatística, o cal xa foi comprobado por Bastos e Taylor ([1]). Actualmente estamos estudando a lei de Weber, que sabemos é certa en humanos e en diferentes especies animais, incluíndo grandes simios e corvos ([10], [11]). A lei de Weber di que necesitas unha porcentaxe [de diferenza] específica entre dous ratios para notar a diferenza entre eles. Noutras palabras, se tes dúas poboacións con diferentes proporcións, canto máis parecidas son esas proporcións máis difícil é determinar se existe unha diferenza entre eles. Ata o de agora, fomos quen de testar isto en dous dos nosos kea. Aínda temos que analizar os datos, pero semella que os kea tamén cumpren a lei de Weber ata certo punto. Aínda temos que recoller datos sobre humanos no noso laboratorio e sobre máis kea para estar seguros destas afirmacións.

P: Como se deseña un experimento para avaliar as capacidades matemáticas dun animal?

R: Esta tamén é unha moi boa pregunta, especialmente porque cando lemos artigos sobre estudos matemáticos ou a meirande parte do traballo cognitivo realizado en animais, soa moito máis sinxelo ca como é en realidade. Basicamente, imaxina ter que ensinar matemáticas a un preescolar ou a nenos máis pequenos sen poder empregar palabras para comunicarlles o que queres que fagan. Cando deseñamos un estudo coma o noso, temos que considerar varias cousas. Un: é o estudo ecoloxicamente relevante para o animal? Dous: como deseñamos o experimento para que os animais poidan desfrutalo? A motivación é un factor importante, porque cando se perde, xa non importa se o animal é capaz de facer a tarefa que lle pides; simplemente non a vai facer. O último, e probablemente o máis importante, é adestrar aos animais para que entendan a pregunta que lles estamos a facer, porque se non a entenden, non podemos asegurar se o experimento non funciona porque non poden realizalo ou porque non poden entendelo. Así, sempre temos que adestrar, o que se traduce nun experimento pasiño a pasiño.

Empregando o noso estudo como exemplo: cun adestramento con reforzo positivo aos kea ensínaselles que unha ficha negra significa un premio, e que unha ficha laranxa significa que non hai premio. Móstranselles entón dous frascos contendo unha mestura de fichas de ambas cores. Porén, unha delas ten unha maior probabilidade de obter unha ficha laranxa. Unha persoa escolle unha ficha de cada frasco, agochándoa na súa man, e dálle ao kea a elixir entre as dúas mans. O kea ten que escoller a man que cre que ten unha maior posibilidade de conter a ficha negra, e ser por tanto recompensado. Entón, como os adestramos para que entendan a pregunta, “que man cres que ten maior posibilidade de conter unha ficha negra?” Isto fíxose en tres fases. A primeira foi facerlles entender que a ficha negra ten valor, e que a laranxa non o ten. A seguinte foi ensinarlles a escoller a man coa ficha negra e non a da ficha laranxa [cando a escolla se facía visible para o kea]. Ademais, isto obrigoulles a seguir a man que contiña a ficha negra, o cal foi de utilidade no último paso do adestramento. Na derradeira fase, adestróuselles para que comprendesen como escoller a man coa ficha negra cando a extracción se facía dun frasco cun 100 % de fichas negras, e non a man coa ficha laranxa, extraída dun frasco cun 100 % de fichas laranxas. Agora o kea xa non podía ver a escolla porque había unha pantalla tapando o evento de elección. Isto é outra cousa que tiveron que entender. Cando se desempeñaron ben no último adestramento, estaban preparados para o primeiro caso [do experimento] de inferencia estatística, na que un frasco contiña 100 fichas negras e 20 laranxas e o outro 20 negras e 100 laranxas.

En resumo, a preparación para un experimento leva tempo, e por tanto, é esencial considerar a motivación e como facer que o animal entenda a pregunta a través dun adestramento con reforzo positivo antes de comezar.

P: Sendo alguén cuxo campo de estudo non está inmediatamente relacionado coas Matemáticas, son as Mates relevantes para o teu traballo diario?

R: Si, as Matemáticas son unha parte esencial do meu traballo diario. Como nós mesmos deseñamos os experimentos, debemos asegurarnos de que as poboacións nos frascos son correctas. Tamén o aleatorizamos todo (a colocación dos frascos, que man escolle primeiro, se facer un movemento paralelo ou cruzado coas mans tras escoller), o cal tamén precisa do uso de matemáticas. Ademais, cando acabamos de recoller os datos, aínda temos que analizalos, e ao facelo, empregamos moitísima estatística. Así que si, diría que as Matemáticas son moi relevantes para o meu traballo diario. Por último, e isto ao mellor é unha tontería, pero traballando con animais ás veces temos que ser nós os que realizamos inferencia estatística baseada no seu comportamento. Sempre imos ao aviario para ver as sensacións que nos dá o comportamento dos kea, e segundo iso tentamos estimar se están listos para o adestramento. Ás veces están demasiado excitados, e temos que averiguar como adestralos ese día en función do seu comportamento. Porén, esta é unha das cousas que me encanta de traballar cos kea: son moi intelixentes e encántalles resolver os problemas que lles presentamos.

Moitas grazas a Mateo Mariño pola súa axuda na tradución da entrevista.

REFERENCIAS

[1] BASTOS, A. P., TAYLOR, A. H. (2020). Kea show three signatures of domain-general statistical inference. *Nature Communications, 11*(1), 1-8.

[2] BASTOS, A. P. M., HORVÁTH, K., WEBB, J. L., WOOD, P. M., TAYLOR, A. H. (2021). Self-care tooling innovation in a disabled kea (Nestor notabilis). *Scientific Reports, 11*(1).

[3] MULCAHY, N. J., CALL, J. (2006). Apes save tools for future use. *Science, 312*(5776), 1038–1040.

[4] O'HARA, M., MIODUSZEWSKA, B., MUNDRY, R., YOHANNA, HARYOKO, T., RACHMATIKA, R., PRAWIRADILAGA, D. M., HUBER, L., AUERSPERG, A. M. I. (2021). Wild Goffin's cockatoos flexibly manufacture and use tool sets. *Current Biology, 31*(20), 4512-4520.e6.

[5] ANDREAS, J., BEGUŠ, G., BRONSTEIN, M. M., DIAMANT, R., DELANEY, D., GERO, S., GOLDWASSER, S., GRUBER, D. F., DE HAAS, S., MALKIN, P., PAVLOV, N., PAYNE, R., PETRI, G., RUS, D., SHARMA, P., TCHERNOV, D., TØNNESEN, P., TORRALBA, A., VOGT, D., WOOD, R. J. (2022). Toward understanding the communication in sperm whales. *IScience, 25*(6), 1–18.

[6] SUZUKI, T. N., WHEATCROFT, D., GRIESSER, M. (2016). Experimental evidence for compositional syntax in bird calls. *Nature Communications, 7*.

[7] GALLUP, G. G., ANDERSON, J. R., SHILLITO, D. J. (2002). *The Mirror Test. In The cognitive animal: Empirical and theoretical perspectives on animal cognition* (pp. 325–333).

[8] TAYLOR, A. H., BASTOS, A. P. M., BROWN, R. L., ALLEN, C. (2022). The signature-testing approach to mapping biological and artificial intelligences. *In Trends in Cognitive Sciences* (Vol. 26, Issue 9, pp. 738–750). Elsevier Ltd.

[9] SHETTLEWORTH, S. J. (2010). *The social intelligence hypothesis. In Cognition, Evolution and Behaviour* (2. edition, pp. 418–421). OXFORD University Press.

[10] ECKERT, J., CALL, J., HERMES, J., HERRMANN, E., RAKOCZY, H. (2018). Intuitive statistical inferences in chimpanzees and humans follow Weber's law. *Cognition, 180*(341), 99–107.

[11] JOHNSTON, M., BRECHT, K. F., NIEDER, A. (2023). Crows flexibly apply statistical inferences based on previous experience. *Current Biology, 33*(15).

[12] RODRÍGUEZ, H. (2020). El kea, un loro estadístico. *National Geographic*, consultado 18/09/2024. enlace: `www.nationalgeographic.com.es/naturaleza/kea-loro-estadista_15269`.

Retos Matemáticos

Sementeira
Clube Olímpico de Mates-USC

Xogos de Periódico

Estreamos nesta 7ª edición de MáisMates o apartado de "Xogos de Periódico", na que nos sucesivos números contaremos con un sudoku, un puzzle de xadrez e cunha mensaxe cifrada que conterá, en cada edición, unha cita dun matemático coñecido e cuxa transcrición revelaremos no seguinte número.

Resolve o seguinte Sudoku:

	2			3		9		7
	1							
4		7				2		8
		5	2				9	
			1	8		7		
	4				3			
				6			7	1
	7							
9		3		2		6		5

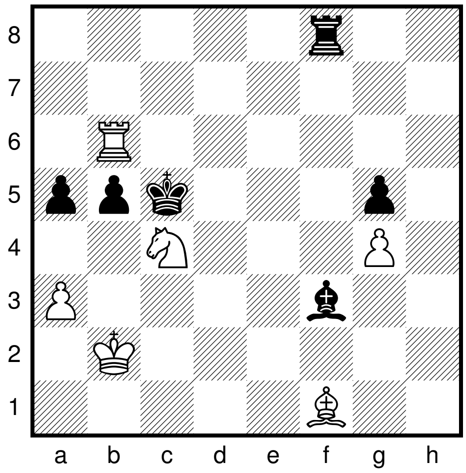
Solución do Sudoku:

6	2	8	5	3	4	9	1	7
5	1	9	8	7	2	4	3	6
4	3	7	9	1	6	2	5	8
8	6	5	2	4	7	1	9	3
3	9	2	1	8	5	7	6	4
7	4	1	6	9	3	5	8	2
2	5	4	3	6	9	8	7	1
1	7	6	4	5	8	3	2	9
9	8	3	7	2	1	6	4	5

Solución do xadrez:

1 ♖×b5+ ♔×b5
2 ♘e5+ ♔c5
3 ♘d7+ ♔d4
4 ♘×f8

Moven para gañar as brancas...



Eres quen de recuperar a cita cifrada?

"Wrgd flhqfld txh survshurx ilarr vreuh rv vhxv surslrv vlperorv: d oralfd, gd txh vh dgplwlx txh h d xqlfd flhqfld txh qrq ilar qlqjxqkd phoorud vhfxor wudv vhfxor, h d xqlfd txh fuhfhx vhq vlperorv."
— *Augustus De Morgan (1864)*

Problemas Propostos

1. Atopar todas as funcións $f: x \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x) \in \mathbb{R}$ continuas que cumpren que
$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

2. Un círculo divídese en 6 seccións. Entón, escríbense os números naturais $1,0,1,0,0,0$ nos 6 sectores que se formaron. Tes unha operación que se permite incrementar o valor de dous sectores contiguos en 1. É posible chegar a que tódolos números sexan iguais, só aplicando a operación anterior?

3. Temos dúas caixas con N bólas numeradas do 1 ao N en cada unha. Imos extraendo simultaneamente bólas unha a unha das dúas caixas, sen devolvelas, ata baleirar as caixas.
   a) Atopar a probabilidade de que en ningunha das extraccións os números das bólas coincidan.
   b) Atopar o límite da devandita probabilidade cando N vai a infinito.

4. Para que valores de $k \in \mathbb{R}$ podemos atopar unha solución $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua para $f(f(x)) = kx^9$?

Solucións do mes pasado:

Donuts, nazis e medallas Fields: Os espazos de Teichmüller

Ibai

Os protagonistas da nosa historia son grandes exemplos de que as matemáticas non son un mundo illado, sen relación co resto da humanidade. Oswald Teichmüller foi un matemático alemán que morreu na fronte, defendendo as ideas do nazismo nas que cría ferventemente mentres facía matemáticas. Maryam Mirzakhani, referente histórica das matemáticas en feminino, foi unha matemática iraniana gañadora da prestixiosa medalla Fields. Ámbolos dous estudaron en profundidade o que se coñece como *Teoría de Teichmüller*, que imos tratar de introducir neste artigo.

Como toda historia en xeometría, a nosa tamén comeza cun toro.

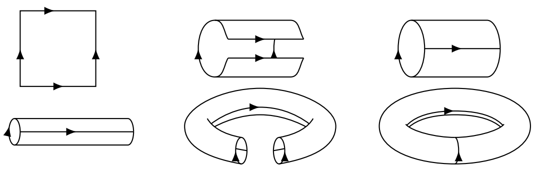


Fig. 1: Construción dun toro a partir do esquema plano. [1]

A estrutura métrica usual do toro, dada pola primeira forma fundamental, ten unha curvatura non constante ao longo da superficie. O toro non se curva igual na parte interior que na exterior, por exemplo. Non obstante, podemos medir as distancias entre dous puntos do toro pasando ao esquema plano e utilizando aí a métrica euclidiana. Deste xeito dotamos ao toro dunha estrutura euclidiana na que a superficie tería unha curvatura uniforme e constante, en particular nula.

Sabemos que as superficies compactas orientables e sen bordo veñen clasificadas polo xénero g. Podemos entón tentar de facer o mesmo que fixemos para as superficies de xénero $g \geq 2$ (a esfera xa sabemos que ten curvatura constante positiva). É posíbel dar unha estrutura xeométrica de curvatura constante ao resto dos membros da clasificación?

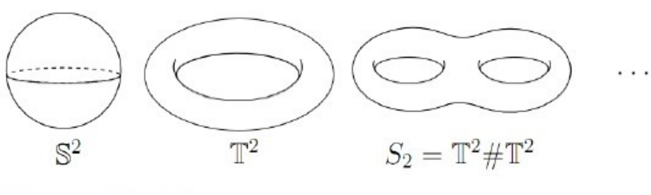


Fig. 2: Clasificación das superficies pechadas orientables. [2]

A resposta é afirmativa, pero temos que irnos a unha xeometría á que estamos menos habituados, a saber, á de curvatura negativa: a xeometría hiperbólica.

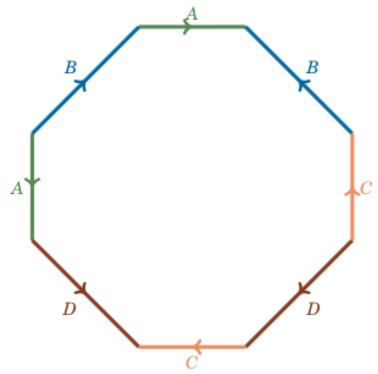


Fig. 3: Esquema plano da superficie orientable de xénero 2.

Se collemos o esquema plano da superficie de xénero 2, é sinxelo ver que non podemos aplicar o procedemento anterior. O problema radica en que tódolos vértices están identificados no cociente, polo que dar unha volta en torno a este único vértice suma 6π radiáns. Pero está claro que unha volta en torno a un punto en calquera xeometría con sentido son sempre 2π radiáns! Non obstante, veremos que, no plano hiperbólico, podemos atopar un octógono que serve para o noso obxectivo.

Hai diferentes modelos de xeometría hiperbólica. Nós utilizaremos o seguinte:

Definición 1. O plano hiperbólico é o disco $\mathbb{D} := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ coa métrica

$$ds^2 = 4\frac{dx^2 + dy^2}{(1 - |z|^2)^2}$$

Pódese comprobar que esta variedade riemanniana ten curvatura constante -1 e que as xeodésicas son diámetros ou arcos de círculos perpendiculares ao bordo (ver Figura 4 e Figura 5). Estas serán entón as nosas "rectas" coas que construír os polígonos para facer as superficies. Resulta que neste modelo xeométrico existen octógonos regulares con ángulo interior $\pi/4$, polo que resolvemos o problema que había na xeometría euclidiana: aquí unha volta en torno ao vértice problemático suma 2π como queriamos. Podemos así construír a superficie de xénero 2 pegando lados deste octógono e dotándoa da estrutura xeométrica que inducen as distancias no plano hiperbólico. De feito, podemos dar a calquera superficie de xénero $g \geq 2$ unha estrutura hiperbólica de xeito análogo.

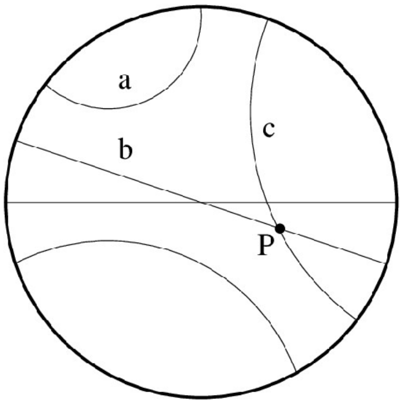


Fig. 4: Xeodésicas no plano hiperbólico.

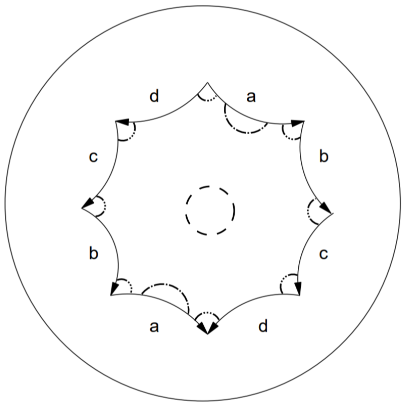


Fig. 5: Octógono regular con ángulo interno $\pi/4$.

Xa vimos entón a importancia que ten a xeometría hiperbólica pois permite dotar de estruturas xeométricas sinxelas a case todas as superficies pechadas!

A seguinte pregunta natural é entón se existen máis estruturas hiperbólicas diferentes das que acabamos de construír. Para respondela, como se soe facer en matemáticas, imos considerar o espazo de todas as estruturas hiperbólicas nunha superficie. Estes espazos que parametrizan estruturas xeométricas coñécense como *espazos de Moduli*. De feito, o lector xa coñece algún. Por exemplo, o plano proxectivo nunha das súas formulacións parametriza todas as rectas que pasan por un punto fixo no espazo euclidiano.

No caso das superficies hiperbólicas traballamos cun espazo un pouco máis grande, o *espazo de Teichmuller* (de feito é unha especie de "recubrimento universal"). Imos entón coa definición:

Definición 2. Dada S_g unha superficie pechada orientable de xénero g, definimos o *espazo de Teichmüller* de S_g como o conxunto

$$[(X,\phi)] \in \mathrm{Teich}(S_g)$$

onde X é topoloxicamente S_g dotada dunha estrutura hiperbólica e $\phi\colon S_g \longrightarrow X$ é un homeomorfismo chamado *marking*. Ademais, identificamos $(X,\phi) \sim (Y,\psi)$ se $\phi \circ \psi^{-1}$ é homótopo a unha isometría.

O termo de "espazo" é utilizado con fundamento, pois podemos dotar a este conxunto dunha topoloxía utilizando o *marking*. [5, Ch. 10] Estes espazos son moi estudados e permiten indagar en moitos ámbitos da xeometría. Unha das cousas interesantes desta teoría é que existe un grupo, o *mapping class group*, que actúa propiamente descontinuo sobre o espazo de Teichmuller, dando lugar á teoría xeométrica de grupos. [5, Ch. 12]

Os espazos de Teichmuller poden ser dotados dunhas coordenadas, as chamadas *coordenadas de Frensel-Nielsen*. Desta forma é como mellor se entende o concepto do *marking*.

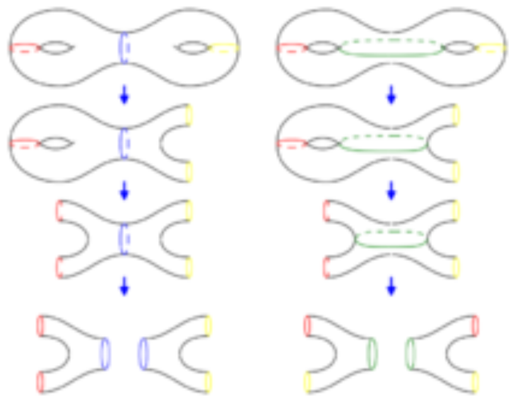


Fig. 6: Descomposición en pares de pantalóns da superficie S_2.

Digamos que toda superficie hiperbólica pode descompoñerse de forma única en pezas máis sinxelas. Esta partición coñécese como *descomposición en pares de pantalóns* (Figura 6). Resulta que a descomposición en pares de pantalóns dunha estrutura hiperbólica vén determinada de forma única pola lonxitude das curvas que a limitan. Estas lonxitudes son as nosas primeiras coordenadas para identificar un punto (positivas por suposto). Polo tanto a estrutura hiperbólica X proporciona as "pezas" que temos para construír un punto $[(X,\phi)] \in \mathrm{Teich}(S_g)$ do espazo de Teichmüller. O resto de coordenadas están relacionadas co marking ϕ e determinan como pegamos as pezas ou pares de pantalóns da estrutura hiperbólica. Se retorcemos os extremos antes de pegar á hora de montar o noso punto do espazo, podemos obter elementos que non sexan equivalentes. Polo tanto, o marking son os nosos "planos de montaxe" para construír o punto $[(X,\phi)]$ e veñen representados por outra serie de coordenadas adicionais.

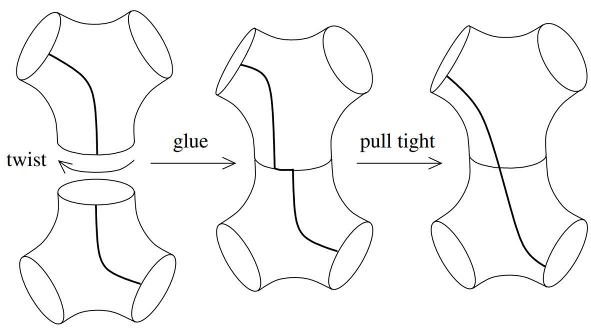


Fig. 7: Unha posible forma de pegar as pezas da superficie, retorcendo antes. [5]

Tendo en conta todo o anterior, podemos formular o seguinte teorema:

Teorema 1. *Dada unha superficie S_g de xénero g tense un* *homeomorfismo*

$$\mathrm{Teich}(S_g) \cong \mathbb{R}_+^{3g-3} \times \mathbb{R}^{3g-3}$$

onde as primeiras coordenadas correspóndense coas lonxitudes das curvas e as seguintes son os parámetros de torcedura.

En 2014, a matemática Maryam Mirzakhani é galardoada coa medalla Fields polos seus avances na xeometría e na dinámica das superficies de Riemann [3], durante os cales desenvolve, de xeito extraordinario, a Teoría de Teichmüller.

REFERENCIAS

[1] Plane to torus in tex. `https://tikz.net/plane-to-torus/`. Acceso: 2024-07-12.

[2] Classification of closed surfaces. `https://chiasme.wordpress.com/2014/08/27/on-subgroups-of-surface-groups/`. Acceso: 2024-07-12.

[3] Fields medals 2014. `https://www.mathunion.org/imu-awards/fields-medal/fields-medals-2014`. Acceso: 2024-07-14.

[4] Teichmuller space - wikipedia. `https://en.wikipedia.org/wiki/Teichm%C3%BCller_space`. Acceso: 2024-07-12.

[5] B. Farb and D. Margalit. *A primer on mapping class groups*. Princeton mathematical series. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.

[6] C. Series. Lecture notes - hyperbolic geometry ma 448, January 2013.

Euler foi un xenio das Matemáticas, pero aínda así, non tivo a sorte de ler Máis Mates antes de quedarse irremediablemente cego. Gauss posiblemente se aburría moito entre clases, algo que podería ter remediado se se lle ocorrese inventar Máis Mates. Hipatia tampouco a tivo nas súas mans, pero seguro que gozaría das cónicas da portada. Se cadra Galois podería ter achado a fórmula de Máis Mates, pero morreu demasiado novo... E ti? Ti tes Máis Mates ao alcance da man!

Máis Mates é un proxecto en forma de revista do alumnado para o alumnado, o proxecto co que todos eses egrexios persoeiros soñarían. Cada mes, traémosvos novos artigos con pequenas anécdotas da historia das matemáticas, as últimas novas, entrevistas, pasatempos, pequenos petiscos en diversos temas que ao mellor non se tratan en profundidade na carreira... En definitiva, todo o que esperta a nosa curiosidade como alumnas e alumnos, e que quizais esperte tamén a túa!

Estamos aí para que desconectes na metade dunha dura sesión de estudo, ou para todo o que se che ocorra. Lenos, coméntanos, compártenos, escríbenos e colabora con nós!

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Accede á revista!

revistamaismates@gmail.com

MÁIS MATES

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

FACULTADE DE MATEMÁTICAS