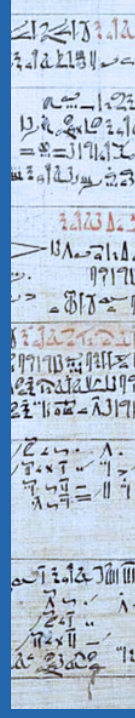
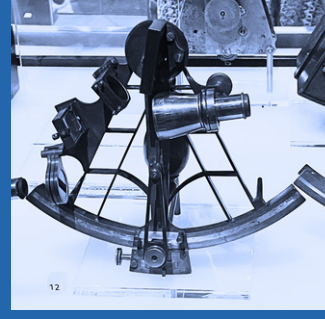
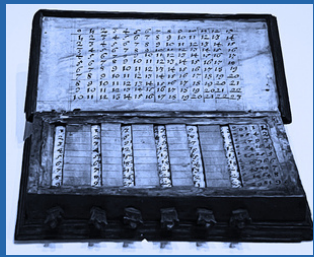
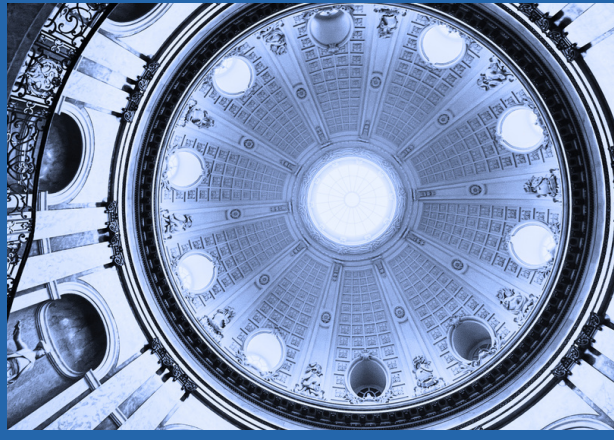


ÁIS MATES



Introdución

Dirección da Revista

Moi bo día lectora ou lector! Estamos encantadas e encantados de que nos leades e desfrutedes connosco deste proxecto. A continuación poderdes ver un resumo dos artigos deste número.

ÍNDICE

Historia

- **Ramanujan: unha vida en cartas**
Santiago González Gómez páx. 2-4

Sociedade

- **Entre vigas e números: A viaxe de Juan Manuel Viaño Rey**
Guillermo Arcos Salgado e Francisco Estévez Lengua páx. 5-6

Retos

- **Retos Matemáticos**
Sementeira páx. 7

Teoría

- **Machine Learning supervisado para a clasificación de datos con **
Ignacio Garbayo Fernández páx. 8-9
- **Xogos cooperativos**
Carmen Bello García, Andrea Caneda Pájaro e Nicolás Chenlo Andrade páx. 10-11

CARTA DE DESPEDIDA.

O que para min comezou como unha idea un pouco tola no verán de 2023 —achegar a investigación e a divulgación ao estudantado, xogar a ser matemáticos e matemáticas de verdade— acabou por facerse realidade. Esa idea converteuse nun proxecto fermoso que ilusionou a moita xente, que abriu portas para emocionarse coas matemáticas e atoparlle sentido ao que facemos.

Moita xente coñéceme como Chisco. Son Francisco Estévez Lengua, un rapaz de Celanova, unha vila de Ourense. Unha das principais motivacións

para poñer en marcha este proxecto foi estar rodeado dunha xente excepcional, aberta e apaixonada polas matemáticas.

Santy, sempre presente, traballador e elocuente, sempre con ideas e cunha escritura fermosa. Os seus artigos son un auténtico pracer de lectura.

Pedro, sempre disposto a axudar, sempre cunha resposta, e con esa capacidade de transmitir dun xeito tan sinxelo coma ameno.

Nacho e Guille, polifacéticos, humildes, humanos. Sempre foi un pracer lervos, e oxalá vos tiveramos lido aínda máis.

Antón e o equipo de Sementeira, sempre dispostos a colaborar e facer da revista un espazo de xogo, de participación, de entretemento.

Rafa e Carmen, os dous profesores que revisaron con lupa cada número da revista. Sen o seu esforzo, o nivel de calidade que acadamos non tería sido posible.

Esta última revista quixera dedicárllela a todas as persoas que participaron no proxecto, que puxeron o seu gran de area, que compartiron ideas, inquiredanzas e ilusións matemáticas.

E, sobre todo, sen ela, a revista probablemente non tería sido tan ben acollida. Ela deunos un fogar na nosa facultade, acolleu este proxecto como se fose seu e axudou a que medrara e rompese fronteiras. Sen **Elena Vázquez Cendón**, non teríamos entrevista polo río. Non teríamos *Máis Mates*. Moitísimas grazas, decana.

Durante estes dous anos tiveron a responsabilidade e o privilexio de coordinar e editar *Máis Mates*. A partir de agora, seguirei colaborando na medida do posible, mais o meu labor nesta etapa chega ao seu fin. Con todo, a revista non remata aquí: o proxecto continúa e, no vindeiro ano, seguirá medrando e ampliando as súas fronteiras. Grazas por acompañarnos e por lernos. Seguidе acompañándonos no próximo número!

Ramanujan: unha vida en cartas

Santiago González Gómez

Srinivasa Ramanujan é posiblemente un dos matemáticos máis singulares da historia. Pobre, enfermizo, extraño en terras afastadas pero cunha intuición portentosa, a súa vida foi marcada por unha carta: aquela que en 1913 enviou ao inglés G. H. Hardy e daría inicio a unha das colaboracións máis fructíferas e famosas da historia das Matemáticas. Aproveitamos a copiosa correspondencia que mantivo Ramanujan ao longo da súa vida para coñecer un pouco máis da súa figura a través das súas cartas.

NADO BAIXO O MANTO DE NAMAGIRI

Ramanujan naceu en 1887 en Erode, unha pequena vila preto de Madrás (actual Chennai), no mandato británico da India. Pertencía á casta dos brahmán, a dos profesores e sacerdotes, pero a súa familia era moi humilde. Ramanujan era un hinduísta devoto; as súas crenzas facíanlo vexetariano e prohibíanlle facer longas viaxes. Xa de rapaz comezou a interesarse polas Matemáticas. Con 16 anos, tivo a sorte de facerse cun libro dun tutor de Cambridge que resumía os máis importantes resultados das Matemáticas puras. O estilo breve, conciso e con poucas demostracións deste libro influiría no pensamento matemático de Ramanujan de por vida. Aínda que este libro estaba xa daquela moi anticuado, Ramanujan estudouno a conciencia e usouno como base para as súas investigacións matemáticas particulares, que comezara xa no instituto. Interesouse en particular pola avaliación de series, as fraccións contínuas e o cálculo de diferentes constantes.

Ramanujan adoitaba pasar moito tempo no templo de Namagiri, a deusa familiar. Quedábase durmido entre as súas paredes e soñaba con fórmulas e ecuacións. Ao espertar, escribíaas. Por exemplo, unha vez Ramanujan soñou cunha pantalla feita enteiramente de sangue correndo, na que unha man escribía resultados sobre integrais elípticas. Para el, o sangue era un signo de Narasimha, o deus consorte de Namagiri; e as fórmulas, revelacións divinas.

Cando Ramanujan quixo entrar á universidade, o único que quería facer eran Matemáticas. Suspendeu o resto das súas clases e foi rexeitado. Para estas datas, tiña xa 21 anos e era moi coñecido entre a comunidade matemática da India, publicando decote no *Journal of the Indian Mathematical Society*. Un dos seus fundadores, Ramachandra Rao, describe así a Ramanujan e un dos seus encontros con el ([1]): “Unha figura baixa, tosca, gorda, sen afeitar e non demasiado limpa [...]. Era miseravelmente pobre... Abriu a súa libreta e comezou a explicar algúns dos seus descubrimentos. Vin que había algo fóra do usual, pero o meu coñecemento non me permitiu xulgar se falaba con senso ou sen el... Pregunteille que quería. Dixo que uns cartiños para vivir e poder continuar coas

súas investigacións.”

Varios membros do *Journal* tentaron conseguirlle a Ramanujan unha beca, sen sorte. Mentres, Ramanujan entrou a traballar como “calculadora humana” no porto de Madrás, e continuou co seu traballo en Matemáticas. Aínda que non publicou nada demasiado interesante, si destaca a súa forma intuicionista e orixinal de atacar os problemas.

A CARTA A HARDY

Ramanujan comezou por estes anos a escribir cartas a varios matemáticos británicos, presentándose, explicando o seu traballo e pedindo axuda económica para poder adicarse completamente ás Matemáticas. A meirande parte das súas cartas recibiron respostas negativas ou non foron sequer repostadas. Porén, Ramanujan seguía traballando e escribindo.

En 1913, Ramanujan escribiu a G. H. Hardy. Hardy era profesor no Trinity College de Cambridge, e adicábase especialmente ao cálculo integral, aínda que para estes anos comezaba a interesarse máis pola teoría de números debido ás súas colaboracións con J. E. Littlewood. Hardy era un matemático moi preocupado polo formalismo e polo rigor, unha achega diametralmente oposta á que practicaba Ramanujan na India. O 16 de xaneiro, Ramanujan envíalle a Hardy nove folios con fórmulas e resultados, e escribe unha carta de presentación ([2]):

Querido señor.

Gustaríame presentarme como un contable na oficina portuaria de Madrás cun salario de só 20£ por ano. Teño uns 23 anos. Non teño formación universitaria, pero si a educación escolar usual [...]. Empleo o meu tempo libre traballando nas Matemáticas. Aínda que non cursei [ningún] curso universitario, estou construíndo un camiño propio para min. Realicei unha investigación especial sobre series diverxentes en xeral e os resultados que obtiven son tildados polos matemáticos locais de “sorprendentes”.

[Ramanujan prosigue explicando algúns dos seus resultados e confrontando afirmacións feitas en artigos de Hardy.] Pídolle que mire os meus papeis adxuntos. Sendo pobre, se está convencido de que hai algo de valor, gustaríame publicar os meus teoremas. Non envío as miñas investigacións completas [...] pero si indico como procedo. Sendo un novato, valoro moito calquera consello que me poida dar. Pido perdón por calquera inconvinte que lle poida causar.

Hardy recibiu a carta con curiosidade. Os primeiros resultados eran vagos ou amplamente coñecidos, pero a medida que pasaban os folios, as fórmulas que Ramanujan incluía volvíanse cada vez máis exóticas e sorprendentes. Hardy

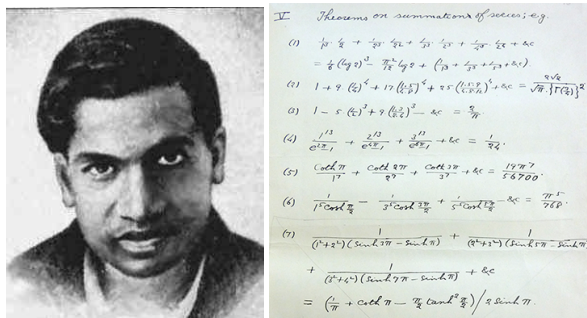


Fig. 1: Á esquerda, Srinivasa Ramanujan. Imaxe de [1]. Á dereita, fórmulas da carta de Ramanujan a Hardy. Imaxe de [3].

consultou a Littlewood. Recoñeceron algúns dos resultados da carta, e sabían que eran correctos, pero moitos outros non. Porén, ambos concluíron que “debían ser correctos, pois se non o fosen, ninguén tería a imaxinación para inventalos” ([3]). Ao seguinte día, Bertrand Russell, colega de ambos, escribiu que “[Hardy e Littlewood están] nun estado de salvaxe excitación, pois cren que atoparon un segundo Newton, un contable hindú en Madrás que gaña 20 libras ao ano”. Uns días despois, tras consultar a outros matemáticos de Cambridge, Hardy respondeu.

Querido señor.

Recibín con moito interese a súa carta e os seus teoremas. Porén, entenderá que antes de poder xulgar con propiedade o valor do seu traballo, é esencial que vexa probas dalgunha das súas afirmacións. Os seus resultados parecenme que se poden dividir en tres clases:

1. *hai certos resultados que son xa coñecidos, ou alomenos facilmente deductibles a partir de teoremas coñecidos;*
2. *hai resultados que, ata onde eu sei, son novos e interesantes, pero interesantes máis polo curioso e dificultade aparente que pola súa importancia;*
3. *hai resultados que parecen novos e importantes, pero nos que todo depende do rigor dos métodos de proba empregados.*

Sobre os resultados do primeiro tipo, Hardy dille que “se o que di vostede sobre a súa falta de formación é certo, que descubrixe estes resultados tan interesantes dálle moito creto” e asegura que lle gustaría comparar as teorías que Ramanujan desenvolvera para obtelos coas coñecidas en Occidente. Sobre os resultados do segundo e terceiro tipo, Hardy escribe:

Sempre escribe os seus resultados de tal xeito que é difícil estar seguros [da súa importancia]. Espero que me envíe tan rápido como sexa posible algunhas das súas probas [sobre primos e series diverxentes]. É moi posible que fixera vostede unha gran cantidade de traballo digno de publicación, e se é capaz de producir demostracións satisfactorias, estarei encantado de facer o que poida para conseguilo [...]. Espero saber de vostede de novo o antes posible.

Hardy tentou ser precavido coa súa carta, pero o certo é

que xa comezara a facer xestións para levar a Ramanujan a Cambridge. Cando Ramanujan recibiu a carta, o que máis lle emocionou foi que parte dos seus resultados fosen xa coñecidos, pois o propio Ramanujan non estaba seguro de que fosen correctos e para el demostraban que estaba indo polo bo camiño. Para decepción de Hardy, a próxima carta de Ramanujan non adxuntaba probas, senón “excusas”:

[...] se lle falo de [como demostrar un certo resultado da primeira carta], dirame que o meu destino é acabar no psiquiátrico [...]. Tento convencelo de que non será quen de seguir os meus métodos de proba [en base a] unha soa carta.

Ramanujan prosegue dicindo que o seu principal obxectivo é que Hardy verifique os seus resultados para poder conseguir unha beca: “Xa son un home a medio morrer de fame. Para preservar os meus sesos quero comida...” ([3]). Este tira e afrouxa entre Hardy e Ramanujan continuou uns meses. Hardy e Littlewood crían que Ramanujan tiña medo de que lle roubasen os seus resultados, suxerencia que feriu a Ramanujan, quen asegurou que estaba disposto a compartir os seus métodos e que simplemente nunca atopara a ninguén que os entendese. Como eran estes métodos? Pois unha mestura de computación, algo parecido a probas, e moita intuición. Como Ramanujan acababa sabendo que resultados estaban ben e cales non, é un misterio. Ramanujan adoitaba comezar dando estimacións para certos problemas e posteriormente refinando a estimación ata dar co resultado exacto. Sexa como for, Hardy foi quen de mover fíos e conseguirlle unha bolsa a Ramanujan, que entrou na Universidade de Madrás. Pero isto non era suficiente para Hardy, que seguía querendo levar a Ramanujan a Cambridge. Inicialmente Ramanujan dixo que non, presumiblemente por motivos relixiosos.

Con todo, a intuición de Ramanujan ás veces fallaba, e a finais de 1913 Hardy escribe a Ramanujan explicando que certos resultados sobre a distribución dos primos na primeira carta de Ramanujan eran “definitivamente incorrectos”. Se cadra isto, unido á obsesión de Hardy con que dese probas dos seus resultados, fixeron dubidar a Ramanujan de se o seguinte paso na súa carreira estaba en efecto en Inglaterra. Ramanujan comezou a contemplar a idea de mudarse a Cambridge cando lle prometeron que podía continuar co seu vexetarianismo e que non tería que facer ningún exame de acceso.

Pero quedaba o problema da relixión. Abandonar a India suporía para Ramanujan perder o seu status sagrado de brahmán. Ramanujan viaxou ao santuario de Namagiri para pedirlle permiso á deusa, e tras varios días, esta aparecéuselle en soños (segundo outras versións, á súa nai) garantíndolle permiso para viaxar. O 17 de marzo de 1914, Ramanujan saía nun vapor cara a Inglaterra.

UN HINDÚ EN CAMBRIDGE

Ramanujan preparouse para a súa nova vida en Inglaterra mercando roupa occidental e aprendendo a atarse unha gravata ou a comer con coitelo e garfo; porén, nunca acabou de afacerse aos zapatos e camiñaba descalzo cando podía. Ramanujan tivo que asistir a clases en Cambridge para aprender os métodos occidentais de facer matemáticas e que Hardy

e Littlewood puidesen traballar con el e axudalo a publicar de xeito eficaz. Porén, ensinarlle non era doado. Littlewood explicaba que “era extremadamente difícil, porque cada vez que calquera tema que se cría que Ramanujan debía saber era mencionado, a resposta de Ramanujan era unha avalancha de ideas orixinais que facían imposible [poder seguir co tema orixinal]” ([1]). Os seus compañeiros describíano como un estudante máis, entusiasta e non demasiado introspectivo. Ramanujan tamén atopou en Cambridge outros estudantes hindús, como Mahalanobis, outro matemático.

Porén, poucos meses despois de chegar, a vida de Ramanujan en Inglaterra daría un xiro radical. Era xuño de 1914 e en Europa estoupaba a Primeira Guerra Mundial. Moitos estudantes e profesores marcharon á fronte, e segundo Ramanujan, os que quedaron “perderon a súa interese nas Matemáticas” ([3]).

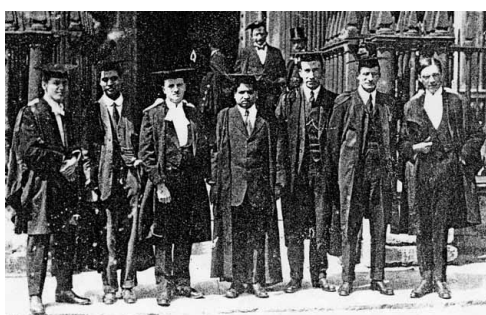


Fig. 2: Ramanujan, no centro, en Cambridge. Hardy está xusto á dereita. Imaxe de [1].

Nunha carta á súa nai, Ramanujan describe así a guerra:

Voan con avións a grande altura, bombardean as cidades e desbarátanas. Tan pronto como se observan avións inimigos no ceo, os avións que descansan en terra despegan e voan a grande velocidade e cargan contra eles, resultando en morte e destrución.

Littlewood uniuse ao esforzo bélico, pero Hardy mantivo o seu traballo normal en Cambridge. Por entón, Hardy e Ramanujan xa colaboraban de xeito fructífero, e foron forxando unha profunda amizade. Non podemos imaxinar o seu traballo senón como unha especie de aventura de cabalerías de Don Quixote e Sancho; ambos tan diferentes, con visións tan irreconciliables das matemáticas, pero capaces de conectar e complementarse de xeito extraordinario.

Ramanujan pasou o seu primeiro inverno en Cambridge enfermo. Porén, cara a marzo de 1915 estaba recuperado e puido publicar os seus primeiros artigos en Inglaterra; todo traballo feito en Cambridge, pois decidira retrasar a publicación do seu traballo feito na India ata que rematase a guerra. En 1916, Ramanujan defendeu con éxito a súa tese sobre números altamente compostos (números cun grande número de factores primos).

En 1917, Ramanujan enfermou novamente, esta vez de xeito grave. Actualmente, cremos que padecía dunha amebiasis contraída na India, pero daquela ninguén era quen de diagnosticar o que lle pasaba. A enfermidade non só freou o seu traballo matemático, senón que puxo en risco a súa vida. Hardy escribe ([1]) que “[...], como todo hindú, é un fatalista, e é extremadamente complicado conseguir que cuide de si

mesmo”.

O certo é que Ramanujan caíu sumido nunha depresión e chegou a ter pensamentos suicidas. Con todo, aproveitaba os momentos de mellora para continuar escribindo matemáticas, e a súa fama en Inglaterra seguiu medrando. En 1918, foi elixido membro da Royal Society (o primeiro hindú en conseguilo) e da Irmandade do Trinity College, asegurándolle estabilidade económica.

Co fin da Primeira Guerra Mundial, os vapores volveron a viaxar de xeito seguro ata a India. Nun leve remonte de saúde, Ramanujan decidiu volver á India, e fíxoo a inicios do 1919, convertido agora nun persoeiro famoso. Aló continuou escribíndose a miúdo con Hardy e traballando en novos resultados matemáticos. Porén, a súa saúde continuou empeorando. O 29 de abril de 1920, a universidade de Madrás enviou a seguinte carta a Hardy:

Querido señor:

Por indicación do Sindicato, escribille para comunicarlle, con moito pesar, a triste nova do falecemento do señor S. Ramanujan, F.R.S., que tivo lugar a mañá do 26 de abril.

Ramanujan morría con 32 anos, deixando unha inxente cantidade de resultados sen publicar e unha morea máis deles sen sequera imaxinar. Inicialmente Hardy tentou recompilar e publicar máis de 3000 resultados que Ramanujan deixara nas súas libretas, pero a tarefa era inmensa e foi avanzando a ritmo lento. Tampouco axudou o feito de que a teoría de números, a área das Matemáticas onde máis prolífico fora Ramanujan, non estivese de moda. Hardy e Littlewood continuaron o seu traballo previo a 1913, aínda que Hardy seguiu considerando a súa colaboración con Ramanujan como o seu maior fito matemático. Non sería ata os setenta que se retomaría o esforzo colectivo da comunidade matemática por probar e publicar resultados legados por Ramanujan, algo que se segue facendo a día de hoxe. Se cadra o máis impresionante de moitos resultados de Ramanujan é que a simple vista, sobre todo na súa época, podían parecer fórmulas curiosas, pero pouco máis. Porén, un século máis tarde, a moitas delas téñenselle descuberto conexións con Matemáticas profundas e tamén atopado usos varios en diversos ámbitos, especialmente na computación de sumas que aparecen, por exemplo, en Mecánica Cuántica.

Dende logo, a vida e logros de Ramanujan revélannos como a comprensión da imaxinación e da intuición, ferramentas tan útiles para un matemático, está aínda moi lonxe de nós. Parece case como se fosen revelacións divinas...

REFERENCIAS

- [1] *Biographies. MacTutor History of Mathematics* (consultado 05/04/2025), enlace: mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/
- [2] KANIGEL, R. (2013). *The man who knew infinity*. Simon and Schuster.
- [3] STEPHEN WOLFRAM (2016), *Who Was Ramanujan?*, Stephen Wolfram Writings (consultado 05/04/2025), enlace: writings.stephenwolfram.com/2016/04/who-was-ramanujan

Entre vigas e números: A viaxe de Juan Manuel Viaño Rey

Guillermo Arcos Salgado

Francisco Estévez Lengua

Neste número temos o pracer de contar coa presenza dun destacado matemático galego, profesor na nosa facultade, cuxa paixón polas matemáticas levouno a percorrer un camiño de éxito até converterse nun investigador de renome internacional e, incluso, reitor da nosa Universidade. Trátase de Juan Manuel Viaño Rey (Boqueixón-A Coruña, 1955), catedrático de Matemática Aplicada (1988), doutor pola Universidade de Santiago baixo a dirección de Alfredo Bermúdez (1981) e tamén doutor pola Universidade Pierre et Marie Curie de París dirixido por P.G. Ciarlet (1983).

No ámbito académico, Viaño é amplamente recoñecido polos seus estudantes como profesor de Análise Numérica Matricial e Cálculo Numérico e doutras materias de métodos numéricos no que é especialista (ten editados 4 libros de texto nestas materias). Entre os seus compañeiros docentes, é admirado pola súa capacidade de liderado e pola súa disposición a colaborar e servir á comunidade universitaria.

Desde Máis Mates, quixemos achegarnos á figura deste universitario de referencia e descubrir algúns aspectos curiosos da súa traxectoria profesional. Traxectoria que, non só reflicte a súa dedicación á investigación e á docencia, senón tamén un profundo compromiso co avance das matemáticas e a formación das novas xeracións de matemáticos. Ao longo dos anos, Viaño tivo a oportunidade de liderar proxectos de investigación que transcenderon as aulas, influíndo positivamente na formación dun numeroso equipo de investigadores e con aportacións relevantes a diferentes disciplinas, dende a física aplicada ata as ciencias computacionais. A súa labor como docente fixo del unha figura clave na formación de miles de estudantes, que, ao seu carón, descubriron a beleza e a potencia das matemáticas.

F: Cántanos, J. Viaño, como foi estudar a carreira de Matemáticas? Tiveches algún tipo de dificultade?

V: Estudei na Facultade de Ciencias en Santiago entre os cursos 1973-1974 e 1977-1978. Daquela eran cinco anos de carreira, pois así o establecía o plan de estudos. En realidade, comezamos en xaneiro de 1974, porque ao ministro de educación franquista, Julio Rodríguez, ocorréuselle cambiar a un calendario escolar anual de xaneiro a decembro, cunhas vacacións no medio. Pero xusto aconteceu o atentado a Carrero Blanco (decembro de 1973), mudaron o ministro e antes de comezar o curso xa sabíamos que tiñamos que rematalo en xuño (e non en decembro) pois volveuse ao calendario tradicional. Así que o curso durou só seis meses. Pero para min non foi o único curso de seis meses porque, por causas relacionadas co servizo militar obrigatorio, os cursos cuarto e quinto tamén tiveron que facelos en seis meses cada un. Estas serían as principais dificultades persoais aínda que existiron outras relacionadas co plan de estudos que se implantou con nós. Era un plan brutal a nivel de contidos. Seguramente nunca houbo un plan con tantos contidos teóricos e tan poucos prácticos. Comprobeino cando fixen o doutoramento en

París: os estudantes españois tiñamos un coñecemento enciclopédico, pero sen destreza práctica. Agora hai máis aposta polas habilidades e destrezas, o traballo en grupo, o TFG, as prácticas... que complementan a formación teórica que, sendo importante, non chega a tanta especialización.

F: Con respecto á etapa universitaria, cal consideras que é a principal diferenza coa actual, se a houber?

V: Hai moitas diferenzas, obviamente. En primeiro lugar, destacaríaa a pouca atención ao alumnado fronte á acollida e trato que recibides agora. Non existían as titorías nin a revisión de exames. A figura do profesor era moi distante, moi autoritaria. Máis se falamos do catedrático, figura venerada que baixaba á aula cos seus acólitos axudantes, daba as notas en voz alta e botábache a reprimenda diante de todos. Pensa que estamos nunha época predemocrática. Os catedráticos eran autoridades científicas e tamén políticas. Os decanos eran nomeados desde arriba. Non existían os consellos de departamento como tales para tomar decisións, nin tampouco representación do alumnado. Os movementos estudantís eran cada vez máis potentes e combativos.

G: Agora estamos nunha situación onde moita xente aposta por facer un máster ou un doutoramento para ampliar as saídas laborais. Acontecía o mesmo daquela?

V: A resposta é máis complexa. Nós non tiñamos moitas oportunidades laborais. Basicamente: ou eras profesor ou non había saída. A gran maioría ía a institutos, academias, colexios privados... e unha minoría quedábase na universidade para ensinar e facer o doutoramento. Non existía a “matemática aplicada” que comezaba a ser xa moi importante noutros países. Xa nos oitenta en Francia coñecín matemáticos que traballaban en problemas reais (deseño de avións, cálculo de encoros, etc.) cousa que aquí aínda non se facía. Cara a finais do século XX produciuse unha saturación e os matemáticos tiñan dificultades para atopar traballo relacionado coa súa carreira. Así que a matrícula na Facultade caeu moitísimo. Afortunadamente, a situación cambiou rotundamente nos primeiros anos do século XXI. Agora hai demanda en investigación, empresas, banca, industrias, hospitais,... Os estudantes xa non se agochan para dicir que lles gustan as mates. Ao contrario, os matemáticos temos prestixio social.

G: Creo que ti fixeches un gran traballo na procura dese prestixio das matemáticas españolas e na captación de estudantes con talento matemático. Que me dis diso?

V: Como decano da Facultade (entre 2001 e 2009), promovemos moitas actividades na captación de estudantes e na difusión das matemáticas como ciencia imprescindible (no curso 2001-02 entraron en primeiro menos de 40 estudantes!). Un traballo colectivo extraordinario dos matemáticos españois permitiu que se celebrase por primeira vez en España (Madrid, 2006) o International Congress of Mathematics (ICM) que ten lugar cada catro anos desde 1900. Formar parte do seu comité científico e organizador foi toda unha

honra e experiencia. A Santiago, tamén en 2006, trouxemos matemáticos representantes de máis de 100 países na XXV Asemblea da International Mathematical Union (IMU) cuxo comité organizador local tiven a honra de presidir. Estes e outros acontecementos puxeron as matemáticas “de moda”. No ano 2007, puxemos en marcha o Proxecto ESTALMAT-Galicia para o estímulo do talento matemático en Galicia que 18 anos despois segue vivo e captando rapaces e rapazas de 12 e 13 anos que son xenios matemáticos. Estas medidas coinciden no tempo co Plan Bolonia, sendo a nosa Facultade unha das primeiras de España en implantar o actual grao en 2008 cando eu era decano. O éxito é indiscutible: desde fai varios anos, máis de 125 estudantes novos cada ano cunha nota de corte superior a 12.

F: Que te levou a estudar matemáticas?

V: Eu era un rapaz que gozaba resolvendo problemas de razoamento e cálculo. Gustábanme os cadrados máxicos, as contas con quebrados, os problemas con ecuacións... e entreteñíame cambiando as hipóteses dos enunciados para ver que pasaba. Tiven profesores na escola primaria e no bacharelato que me formaron ben e me animaron moito a seguir ese camiño. Presenteime á Olimpíada Matemática no ano 1973 e gañei a fase galega, o que me reafirmou que tiña que estudar matemáticas. Na carreira non tiven dificultades. Estudaba moito, mesmo de madrugada, cun compañeiro que dicía que eu era incansable. E iso traducíuse nun bo expediente. Sempre me gustou traballar de noite. Mesmo agora. Moitos resultados de investigación resolvínos mesmo entre soños.

G: E despois, como continuaches?

V: Ofrecéronme quedar aquí. Fixen a tesina con Alfredo Bermúdez, logo o Ministerio concedeume unha bolsa FPI e marchei a París, ao Institut National de Recherche en Informatique et Automatique (INRIA) e a Universidade P. M. Curie. Alí fixen o posgrao, asistín a cursos de figuras de talla mundial como J. L. Lions, Ciarlet, Brezis, Glowinski, Raviart, Pironneau... Estiven dous anos. Coñecín como traballaban nas universidades e o adianto que nos levaban en todo. A aprendizaxe foi vital para a miña carreira posterior. Tres anos despois (1986) retornei á P.M. Curie como profesor (substituíndo precisamente a Glowinski). Dalí volví a Santiago para facerme cargo como director do recentemente creado Departamento de Matemática Aplicada. Daquela aínda a USC era a única universidade de Galicia e o noso departamento tiña profesores nas sete cidades galegas.

F: Sobre que tratan as túas teses?

V: A de aquí sobre simulación numérica en termoelasticidade e plasticidade. Son modelos con EDPs e condicións de fronteira especiais. A simulación faise co método de elementos finitos e un método de penalización-dualidade. Esta tese evolucionou cara unha liña de investigación en simulación numérica en problemas de contacto elastoviscoplasticos moi común na industria (pneumáticos, freos, raís, conformado de metais, cables de ascensor, brackets dentais, ...).

A de París sobre xustificación de modelos de placas termoelásticas que deu lugar a toda unha liña da miña investigación sobre xustificación e xeneralización de modelos en vigas elásticas (Bernoulli, Timoshenko, Vlasov...). Esta liña emprega métodos asintóticos cun pequeno parámetro para obter modelos bidimensionais ou unidimensionais máis completos, que aborden situacións máis necesarias na enxeñaría actual (pontes, avións, oleodutos...).

Estas dúas liñas mantivéronse e agrandáronse ata a actualidade.

G: Fixeches todo isto mentres dabas clase?

V: Sempre dei clase agás cando estiven facendo o doutoramento en París e cando fun vicerreitor e reitor da nosa universidade. Dar clase é a función primordial dun profesor universitario pero, a par, tamén ten que facer investigación. A min dar clase apaixóname.

F: Ao longo da súa carreira, fixo importantes achegas na investigación. Como influíron nas matemáticas aplicadas, en especial no campo da enxeñaría?

V: A miña investigación en modelos de vigas elásticas e en problemas de contacto en sólidos, permite obter modelos e métodos de cálculo máis fiables en estruturas moi importantes na enxeñaría civil. Durante os anos de investigación, logramos xustificar matematicamente os modelos utilizados por enxeñeiros que foron fundamentais para o desenvolvemento de estruturas de avións e naves espaciais, pontes modernas, rañaceos, pero tamén con aplicacións en biomecánica, implantes dentais, modelos de formación do oso humano, fabricación de volantes de automóvil, etc... A nosa contribución foi importante porque, sen ser expertos en enxeñaría, a través dos métodos matemáticos, fomos capaces de dar un respaldo xustificativo a eses modelos e, ao mesmo tempo, xeneralizalos, ampliando o seu alcance e aplicación. O feito de que os nosos traballos sexan utilizados nestes ámbitos reflicte o impacto directo que a investigación matemática pode ter en áreas prácticas e aplicadas.

G: Nos últimos anos seguiches investigando?

V: Sempre. Pero é certo, que nos últimos anos, houbo algúns intervalos nos que me dediquei máis á xestión universitaria chegando a ter a honra de ser reitor. E a ese nivel, a investigación necesariamente baixa un pouco. Desde 2021, xa non fago ningunha xestión e colaboro na investigación cos meus discípulos (a maioría son profesores nas Universidades de A Coruña e Vigo), redacto manuais de docencia en métodos numéricos no grao (quero publicar o volume 5) e elementos finitos cos contidos do máster de matemática industrial. Tamén dou conferencias de divulgación.

F: Como evolucionou a túa traxectoria na xestión?

V: Fun o primeiro director do Departamento de Matemática Aplicada no 86. Tiña 31 anos. Despois (2001) dirixín o Instituto de Matemáticas (antecedente do que hoxe é CIT-Maga), fun decano da nosa Facultade (2001-2009), logo fun vicerreitor de Profesorado e Organización Académica e, finalmente, fun reitor no período 2014-2018, a maior honra e satisfacción académica dun universitario.

G: Antes, para entrar a unha carreira universitaria, entendo que non calquera podía acceder, tamén por cuestións económicas. Quería saber se había axudas económicas para entrar a unha licenciatura naquela época.

V: Non como agora, aínda que si había axudas. Eu estudei con bolsa no bacharelato e da Olimpíada Matemática tiven unha pequena axuda na carreira, moi pequena. Pero había moitas menos axudas e era difícil acceder a elas, entre outras cousas pola falta de transparencia e facilidades para solicitudes. No rural, era habitual que as solicitudes das axudas as cubrira o alcalde ou cura... porque na túa casa non sabían facelo. Afortunadamente o contexto do que gozamos hoxe é moito máis positivo. E espero que sexa mellor cada día.

Retos Matemáticos



XOGOS DE PERIÓDICO

Resolve o seguinte Sudoku:

						6		8
		2			3			
	4						2	
		1		7		4		
7	8		1					
		3		6	5			
	5		9	4				7
2		4	7			3		9
9	7			3	1	2	5	4

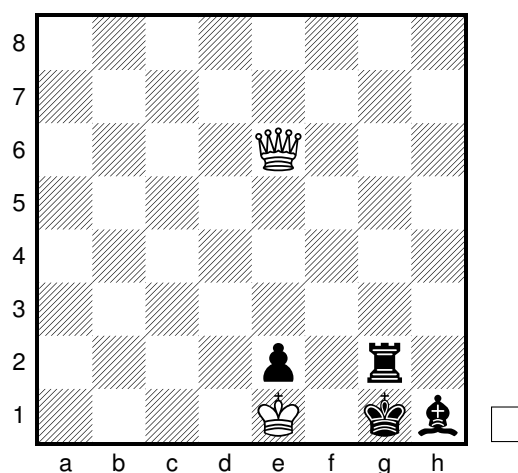
Solución do Sudoku:

4	5	2	1	3	8	6	7	9
6	9	3	8	5	7	4	1	2
7	1	8	2	4	6	9	5	3
1	6	7	5	8	3	2	4	7
9	3	4	5	6	1	2	8	7
2	8	6	7	9	3	1	5	4
3	2	9	6	1	5	7	4	8
5	7	1	3	2	4	8	6	9
8	4	7	9	2	5	3	6	1

Solución do xadrez:

#P8 S
 788 +P8 P8
 748 P8 S
 188 +P8 P8
 748 98 I

Gañan as brancas en 5 movementos...



Descubrimos a cita do número anterior:

“As matemáticas son a arte de darlle o mesmo nome a cousas distintas.”
 — Henri Poincaré (1921)

Es quen de recuperar a cita cifrada?

“2698361143611972426985737476561127479685627142431946724912724973749472426545562654319473
 62826543431249771319476561127479684576745443674131”.

— William Paul Thurston

PROBLEMAS PROPOSTOS

1. Probar que as únicas potencias de 2 e 3 que son consecutivas son (1,2), (2,3), (3,4), (8,9).
2. Temos p clases non limitadas de obxectos distintos. Sexa a_n o número de formas de ordenar n destes obxectos nunha liña (tendo en conta todas as posibles escollas de n obxectos e que os obxectos dunha mesma clase son indistinguibles). Achar a_n de forma explícita empregando funcións xeradoras exponenciais.
3. Antón escribiu na pizarra os seguintes números:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{14022024}$$

Pide un voluntario, e sae á pizarra Martín. Explicálle a Martín que ten que escoller dous números ao azar da pizarra, a e b , e calcular $a + b + ab$. Logo ten que borrar a e b da pizarra e engadir o resultado das contas anteriores. Martín repite este proceso un bo rato ata que só queda un número na pizarra. Antón ensínalle unha predición que tiña feita con anterioridade que, para a non sorpresa de Martín, que xa coñecía as habilidades matemáticas de Antón, é o número que quedou finalmente no encerado. Cal é o devandito número e como fixo Antón para predicilo con anterioridade?

4. Se $p \geq 7$ é un número primo, atopar todos os posibles restos de dividir p^2 entre 30.

Solucións do nº anterior:



Machine Learning supervisado para a clasificación de datos con



Ignacio Garbayo Fernández

Os paraugas do *machine learning* recolle técnicas que adoitan dividirse en 4 categorías principais: aprendizaxe supervisado, non supervisado, semisupervisado e por reforzo. Centrarémonos no primeiro.

Cando a variable resposta dun modelo é cualitativa, en lugar de tomar valores numéricos (cuantitativa), empregaremos modelos de clasificación en clases. Neste caso, a esta variable tamén se lle coñece como **categorica** e empregaranse estes dous nomes indistintamente. Así, unha variable Y deste tipo pode tomar valores nun conxunto pechado de elementos, coñecidos como **categorías**. É frecuente que a base para realizar a clasificación sexa o cálculo das probabilidades de pertenza a cada categoría, o que permitirá a súa aplicación a problemas reais de planificación ou, mesmo, de diagnóstico médico.

Na linguaxe **R**, dispoñemos de varios paquetes que permiten implementar e traballar cun modelo como o descrito. O paquete *caret* (*Classification And Regression Training*) facilita a preparación de datos, a selección de modelos, a avaliación e o axuste de hiperparámetros, entre outras tarefas. Imos extraer a información do artigo de [1] e [2], transversalmente.

ENFOQUES PRINCIPAIS

Na clasificación do *machine learning* existen dous tipos de aprendices: os preguiceiros, que se limitan a memorizar os datos de adestramento e, cada vez que é necesario facer unha predición, buscan ao veciño máis próximo; e os ansiosos, que primeiro crean un modelo a partir do conxunto de datos de adestramento e, despois, fan predicións con conxuntos de datos futuros.

SELECCIÓN DE CARACTERÍSTICAS

Un modelo con demasiadas variables pode axustarse en exceso aos datos de adestramento e funcionar mal con novos datos. Ademais, variables irrelevantes ou redundantes poden introducir ruído e facer que o modelo se confunda.

En **R**, dispoñemos da función *rfe*, que automatiza o proceso de selección de variables utilizando eliminación recursiva con análise discriminante do tipo lineal, establecida unha función de repetición *control* sinxela. A chamada á función *predictors* devolve as variables elixidas, en forma de columna.

```
rfe(data[, vars], as.factor(data$Diagnosis),
    sizes = c(1:30), rfeControl = control)
predictors(results)
```

A intuición detrás do método é determinar un subespazo de menor dimensión no cal os puntos de datos do problema orixinal sexan “separables”, definida a separabilidade en termos de valor medio e varianza. A Figura 1 reflicte unha idea.

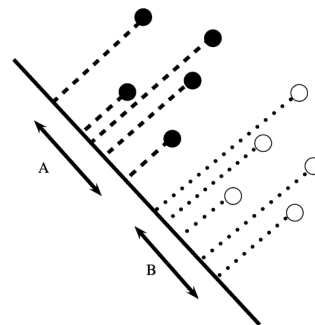


Fig. 1: Na primeira aproximación bidimensional, os puntos mostrais proxéctanse nunha dimensión. Esta liña elixírase de forma que se maximice a separabilidade dos puntos. Fonte: [3].

SEPARACIÓN DOS DATOS

Un aspecto importante na creación de modelos a partir dun conxunto de datos é que se debe garantir que as predicións que este produza terán a mesma certeza que os datos utilizados para o seu adestramento. Tradicionalmente, isto conseguíuse dividindo a mostra en dous conxuntos: de adestramento e de proba. O conxunto de adestramento utilízase para a construción do modelo, mentres que o de proba cobra especial relevancia ao estimar a eficiencia preditiva do mesmo. Na actualidade, algunhas achegas máis recentes ao problema do *tuning* apostan por dividir o conxunto de datos en varios subconxuntos de adestramento e proba.

Podemos empregar a función *createDataPartition* do paquete *caret* para dividir os datos en conxuntos de adestramento e proba. Antes de construír estes conxuntos será conveniente empregar *as.factor*, que converte unha variable nun factor, un tipo de dato especial en **R** que representa categorías con niveis definidos.

```
library(dplyr); library(ggplot2)
library(lattice); library(caret)
set.seed(123) # Para reproducibilidade
trainIndex <- createDataPartition(
  data$Diagnosis, p = 0.8,
  list = FALSE, times = 1
)
trainData <- data[trainIndex, ]
testData <- data[-trainIndex, ]
```

Neste exemplo, *data\$Diagnosis* é a variable de resposta ou clase obxectivo segundo a cal se vai realizar a partición dos datos, $p = 0.8$ especifica que o 80% dos datos se asignarán ao conxunto de adestramento, *list = FALSE* forza a que a función devolva un vector de índices no canto dunha lista,

e times = 1 indica o número de particións a crear, que xa indicamos que pode ser variable.

CONSTRUCCIÓN DE MODELOS

A función `train` de `caret` centraliza o proceso de adestramento de modelos, permitindo a avaliación comparativa de diferentes algoritmos de maneira consistente. A súa sintaxe básica é a seguinte:

```
model <- train(
  formula = Diagnosis ~ Var01 + ...
  + VarN,
  data = trainData, method = "method_name",
)
```

Co modelo supervisado adestrado, a función `predict` permite obter as predicións para os conxuntos de adestramento ou de proba, é dicir, a clase de clasificación agardada segundo o modelo.

```
predicions <- predict(model, type = "prob",
  newData=trainData)
```

Se non indicamos o tipo, devolve a clase predita, pero con `prob` devolve unha táboa coas observacións como filas e as probabilidades de pertenza a cada clase do modelo como columnas.

MÉTRICAS DE CLASIFICACIÓN

Fixada unha clase fronte á que se vai comparar entre todas as do modelo, podemos calcular diversas métricas de rendemento, entre elas:

- **Matriz de confusión:** estrutura que mostra o número de verdadeiros positivos (TP), verdadeiros negativos (TN), falsos positivos (FP) e falsos negativos (FN) nunha táboa.
- **Sensibilidade:** frecuencia coa que o suceso de interese se predi correctamente para todos os elementos mostrais que verifican dito suceso. Cálculase como: $\frac{TP}{TP+FN}$.
- **Especificidade:** frecuencia coa que os elementos mostrais que non verifican un suceso son preditos como elementos que efectivamente non o verifican. Vén dada por: $\frac{TN}{TN+FP}$.
- Outras derivadas das anteriores, como o índice J de Youden, os valores predictivos, a kappa de Cohen ou a curva ROC, que se crea enfrontando a taxa de verdadeiros positivos (sensibilidade) á taxa de falsos positivos (1-especificade) nun gráfico.
- A máis fácil de entender de todas é a **exactitude (ACC)**, que se obtén segundo: $\frac{TP+TN}{TP+TN+FP+FN}$. É a que se adoita empregar nos estudos de rendemento comparando a efectividade de varios clasificadores.

En **R**, todas elas pódense obter mediante a función `coords` de forma simple, utilizando a curva ROC como referencia e fixando a `best` para utilizar o limiar óptimo para separar de forma binaria a pertenza ou non á clase obxectivo (por exemplo, se `prob > limiar`, tómanse as clases prefixadas). Bástalle con definir `ret` como o nome da métrica que se desexa obter, no seu termo en inglés.

```
roc_curve <- roc(trainData$Diagnosis,
  as.numeric(predicions))
coords(roc_curve, "best", ret = "specificity")
```

Podemos representar mediante a función `plot` a curva ROC e obteremos algo semellante ao que se mostra na Figura 2.

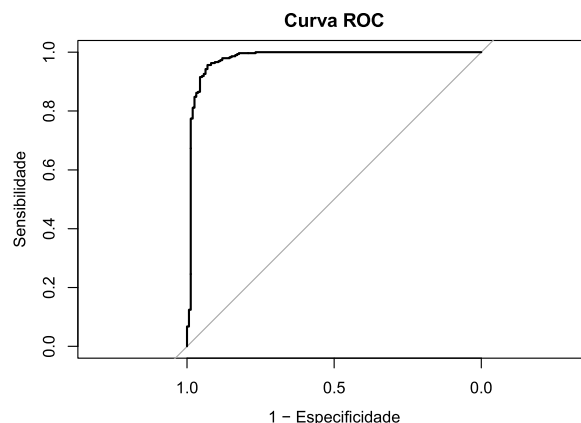


Fig. 2: Curva ROC de exemplo.

O modelo óptimo debería desprazarse cara á esquina superior esquerda do gráfico. Existe outra métrica, a área baixo a curva (AUC), que mide a capacidade do modelo para distinguir entre clases positivas e negativas. Un valor de AUC próximo a 1 indica un modelo cunha boa capacidade discriminativa, mentres que un valor próximo a 0.5 indica un rendemento similar ao azar.

APLICACIÓNS

A construción e análise de Modelos Predictivos de Clasificación enlaza co aprendizaje en Inferencia Estatística. As estratexias de clasificación teñen como obxectivo desenvolver modelos de clasificación para predicir e categorizar a etiqueta de decisión para unha instancia particular. Ultimamente, desenvólvense combinacións de técnicas, coñecidas como ensembles. Un ensemble $D = \{D_1, \dots, D_L\}$ consiste nun conxunto de L clasificadores base que se combinan para realizar unha única predición, co obxectivo de mellorar a exactitude das predicións individuais. O paquete `caret` de **R** dispón tamén de funcións para construír este tipo de estratexias, e o seu uso resulta interesante para analizar conxuntos de datos reais e garantir a maior exactitude na análise.

REFERENCIAS

- [1] G. James, D. Witten, T. Hastie e R. Tibshirani, *An Introduction to Statistical Learning with Applications in R*. Springer, 2023.
- [2] M. Kuhn e K. Johnson, *Applied Predictive Modeling*. Springer, 2016.
- [3] P. Xanthopoulos, P. M. Pardalos e T. B. Trafalis, *Robust Data Mining*. Springer, 2012.

Xogos cooperativos

Carmen Bello García,
Andrea Caneda Pájaro e
Nicolás Chenlo Andrade

A teoría de xogos estuda como os axentes toman decisións de xeito estratéxico. Nacen no ámbito da economía para entender certos comportamentos das empresas e dos consumidores, e na actualidade ten moitas aplicacións en campos como a bioloxía, a ética ou o comportamento. Ten dúas ramas principais que difiren na maneira de formalizar a interdependencia entre xogadores. Na non cooperativa, un xogo é o modelo detallado de todos os movementos viables. Pola contra, na teoría cooperativa non se considera tanto detalle, senón que se describen unicamente os resultados obtidos cando os xogadores cooperan.

XOGOS DE UTILIDADE TRANSFERIBLE COOPERATIVOS (TU-COOPERATIVOS)

Os xogos TU-cooperativos úsanse para modelar situacións onde a cooperación beneficia aos axentes como no reparto de gastos entre veciños. Os xogos modelan situacións onde ocorren conflitos de interese e chamamos xogadores aos axentes involucrados no xogo. Un xogo TU que involucra un conxunto de axentes pode describirse mediante unha función característica v que asocia un número real a cada coalición (subconxunto de axentes). Dicimos que $v(S)$ é o valor da coalición que se pode garantir se os axentes cooperan. Nestes xogos, as solucións propoñen maneiras de distribuír os beneficios tras a cooperación. Algunhas ferramentas máis destacadas para obter solucións son o valor de Shapley, o índice de Shapley e Shubik e o nucleolo. Non definiremos formalmente, intentando manternos nas súas interpretacións prácticas.

O PROBLEMA DAS DEMANDAS CONFLITIVAS

Este problema é un caso particular do problema de distribución no que a cantidade a distribuír non é suficiente para satisfacer as demandas dos axentes. Por exemplo, describe a situación á que se enfronta un tribunal que ten que distribuír o patrimonio neto dunha empresa en creba entre os seus acredores. Neste tipo de problemas, existen regras que asocian a distribución da dotación entre os axentes. Algunhas das máis importantes son a proporcional, a de premios iguais restrinxidos, a de perdas iguais restrinxidas, a de Talmud, a de chegada aleatoria e a regra proporcional axustada.

EXEMPLOS E ILUSTRACIÓNS

Nesta sección comentaremos exemplos de cada un dos tipos de xogos citados anteriormente utilizando o paquete *GameTheory* en R, o cal foi creado para presentar solucións comúns a xogos cooperativos.

Xogos cooperativos de utilidade transferible

Gañanzas.

Analizaremos un exemplo proposto por Lemaire (1991) onde 3 individuos poden colaborar invertindo en fondos comúns (é dicir, 3 axentes). Defínese coa seguinte función v os valores de coalición, sendo $v(12)$ a coalición de 1 e 2, $v(13)$ a coalición de 1 e 3, e así sucesivamente, ata chegar a $v(N)$, a gran coalición, incentivada polo xogo.

$$\begin{array}{lll} v(\emptyset) = 0 & v(1) = 46125 & v(12) = 69187,5 \\ v(N) = 90000 & v(2) = 17437,5 & v(13) = 53812,5 \\ & v(3) = 5812,5 & v(23) = 30750 \end{array}$$

Calcularemos o índice de Shapley e o nucleolo e compararemos os resultados obtidos.

Índice de Shapley	
inversor 1	51750
inversor 2	25875
inversor 3	12375

TABLA 1: VISUALIZACIÓN DO ÍNDICE DE SHAPLEY PARA O PROBLEMA DE GAÑANZAS.

O índice de Shapley reflexa a contribución marxinal de cada inversor ao beneficio total xerado pola coalición. Polo que, tendo en conta os datos da táboa, o inversor 1 é o que máis contribúe considerablemente, seguido do 2 e por último do 3.

Por outra banda, calcularemos agora o nucleolo, formulando o problema como un modelo de programación linear, pois intentamos minimizar a máxima insatisfacción das coalicións, entendida como a diferenza entre o que pode acadar unha coalición por si soa e o que recibe nun reparto proposto. Definimos como C1, C2 e C3, os pagos asignados aos tres axentes, e creamos unha variable auxiliar, C4 que representa a máxima insatisfacción, a cal queremos minimizar.

Para resolver este problema, utilízase un solver de programación linear (lp-solve) en R, que usa o método dual simplex, unha modificación do método simplex convencional, que se emprega cando se teñen restricións con desigualdades. Ademais, emprégase a estratexia de Pricing Devex, para elixir que variable entra na base en cada unha das iteracións. Despois de 5 iteracións, a resposta é -6562.5, o que significa que a máxima insatisfacción das coalicións é de 6562.5 unidades. Os datos, noutras palabras, os pagos asignados a cada axente según o cálculo do nucleolo, correspóndense coa segunda columna da táboa a continuación. A terceira columna é o exceso,

$v(S)$	$x(S)$	Ei
46125.0	52687.50	-6562.50
17437.5	24468.75	-7031.25
5812.5	12843.75	-7031.25

TABLA 2: RESUMO DOS DATOS EN REFERENCIA AO NUCLEOLO PARA O PROBLEMA DE GAÑANZAS.

que representa a diferenza entre o que unha coalición debería recibir ($v(S)$) e o que realmente recibe ($x(S)$).

Esencialmente, o nucleolo busca unha distribución individualmente racional do valor da gran coalición para minimizar a máxima insatisfacción.

En definitiva, calculados ambos conceptos, vemos que o inversor 1 e o 3 ganan máis co reparto segundo o nucleolo e o inversor 2 sae mellor parado co reparto segundo o índice de Shapley, non obstante, dado que os pagamentos resultantes de ambas métricas non presentan diferenzas drásticas, isto suxire que o xogo é relativamente xusto para todas as coalicións, sen grandes tensións, o que implica que a estrutura do xogo fomenta a cooperación entre os axentes.

Custos.

Falemos agora dos problemas de asignación de custos, comunmente chamados problemas do aeroporto (Littlechild e Thompson, 1977). Considéranse varias aerolíneas que utilizan conxuntamente unha pista de aterraxe. Evidentemente, canto máis grandes sexan os avións da aerolínea, máis extensa deberá ser a pista, pois debe poder ser utilizada polo avión máis grande de cada unha das compañías. Ademais, as pistas poden ser utilizadas para avións máis pequenos sen custos engadidos. Cos seguintes datos trataremos de responder á pregunta de como se deberían repartir os gastos da construción da pista de aterraxe entre as aerolíneas. Neste exemplo contamos con 4 empresas e novos valores de coalición. Calcúlase o índice de Shapley e o nucleolo, este último de maneira análoga ao caso das gañanzas. Con todo, a diferenza do exemplo anterior, neste caso estamos intentando maximizar a mínima 'excedencia' (exceso de custo da construción da pista) en lugar de minimizala.

	Índice de Shapley
Aerolínea 1	17.33333
Aerolínea 2	18.00000
Aerolínea 3	36.33333
Aerolínea 4	38.33333

TABLA 3: VISUALIZACIÓN DO ÍNDICE DE SHAPLEY PARA O PROBLEMA DE CUSTOS.

$v(S)$	$x(S)$	E_i
26	13.00	13.00
27	13.50	13.50
55	40.75	14.25
57	42.75	14.25

TABLA 4: RESUMO DOS DATOS EN REFERENCIA AO NUCLEOLO (COLUMN 2) PARA O PROBLEMA DE GAÑANZAS.

As conclusións que podemos sacar despois dos cálculos son similares ás do exemplo anterior. O nucleolo favorece ás aerolíneas pequenas, é dicir, a 1 e a 2, dándolles custos máis baixos que co índice de Shapley, pois busca evitar que algunha coalición teña unha desvantaxe moi grande, ou que xenera unha asignación onde os excesos son moi similares favorecendo a equidade do sistema. Co índice de Shapley realízase simplemente un reparto equitativo segundo a contribución promedio, co que paga máis a aerolínea 4.

Poder do voto.

Nun terceiro estudo, analízase o poder de voto mediante o índice de Shapley-Shubik, empregando datos de tres eleccións autonómicas de Cataluña.

Os resultados amosan que partidos con diferente número de escanos poden ter a mesma capacidade de influír na formación de maiorías. Así mesmo, os partidos pequenos teñen pouca ou nula relevancia aínda tendo algún escano, e a aparición de máis partidos reduce o poder individual, ao haber máis combinacións de coalicións posibles.

Con isto, o índice de Shapley-Shubik revela que o número de escanos non sempre reflicte o poder real de negociación dun partido.

Problema de reclamacións conflitivas

Poden analizar problemas de distinta índole; para rematar, centrarémonos nas conclusións dun último exemplo, para amosar o que permite acadar a Teoría de Xogos. Este exemplo analiza a repartición de cotas de pesca na Unión Europea como un problema de reclamacións nun xogo de utilidade transferible. Estúdanse as asignacións con distintas regras de distribución baseadas no historial de capturas.

Os resultados mostran que o país con maior reclamación recibe sempre a maior cota, e o mesmo para a menor. A regra proporcional favorece aos países con reclamacións altas, mentres que o nucleolo e Shapley reducen desigualdades. Co índice de Gini obsérvase que a regra de premios iguais restrinxidos é a máis equitativa (menor índice de Gini), fronte á de perdas iguais restrinxidas, a máis desigual. A curva de Lorenz tamén reflicte estas diferenzas de equidade. Para máis información sobre estes métodos suxírese consultar a referencia.

En resumo, diferentes métodos de reparto poden alterar a distribución dos recursos, sendo as regras máis xustas as que priorizan a equidade sobre a proporcionalidade.

Cómpre sinalar que aínda que o cálculo do nucleolo pode ser complexo, pode garantirse a súa robustez contrastando coas solucións dos problemas de bancarrota e reclamacións en conflito. Segundo O'Neill, estas situacións modélanse como xogos cooperativos, onde o nucleolo coincide coa solución do Talmud, e o valor de Shapley, coa chegada aleatoria.

En definitiva, a teoría de xogos cooperativos ofrécenos un marco sólido para analizar conflitos e distribucións xustas, cun amplo abano de aplicacións sociais, económicas e políticas.

REFERENCIAS

- [1] Sebastián Cano-Berlanga, José-Manuel Giménez-Gómez e Cori Vilella. **Enjoying cooperative games: The R package GameTheory**. *Applied Mathematics and Computation*, 305:381–393, 2017. doi:10.1016/j.amc.2017.02.010. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300317301145>.

Euler foi un xenio das Matemáticas, pero aínda así, non tivo a sorte de ler Máis Mates antes de quedarse irremediabilmente cego. Gauss posiblemente se aburría moito entre clases, algo que podería ter remediado se se lle ocorrese inventar Máis Mates. Hipatia tampouco a tivo nas súas mans, pero seguro que gozaría das cónicas da portada. Se cadra Galois podería ter achado a fórmula de Máis Mates, pero morreu demasiado novo... E ti? Ti tes Máis Mates ao alcance da man!

Máis Mates é un proxecto en forma de revista do alumnado para o alumnado, o proxecto co que todos eses egrexios persoeiros soñarían. Cada mes, traémosvos novos artigos con pequenas anécdotas da historia das matemáticas, as últimas novas, entrevistas, pasatempos, pequenos petiscos en diversos temas que ao mellor non se tratan en profundidade na carreira... En definitiva, todo o que esperta a nosa curiosidade como alumnas e alumnos, e que quizais esperte tamén a túa!

Estamos aí para que desconectes na metade dunha dura sesión de estudo, ou para todo o que se che ocorra. Lenos, coméntanos, compártenos, escríbenos e colabora con nós!



FACULTADE DE MATEMÁTICAS



Accede á revista!

revistamaismates@gmail.com

